

江西省重点中学协作体 2023 届高三第二次联考

数学（文）参考答案和评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	D	C	A	B	B	D	C	C	B	A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $y = \frac{1}{e}x$ 14. $-\frac{5}{9}$ 15. $3+2\sqrt{2}$ 16. $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right)$

答案详解：

1. A 【解析】由 $x > 0$ ，得 $M = (0, +\infty)$ ，故 $M \cup N = [0, +\infty)$ 。故选 A。

2. D 【解析】 $z = \frac{a^2+i}{1-i} = \frac{(a^2+i)(1+i)}{2} = \frac{a^2+a^2i+i-1}{2} = \frac{a^2-1}{2} + \frac{a^2+1}{2}i$ 是纯虚数，得 $a^2-1=0$ ，

则 $a = \pm 1$ ，所以 $z = i$ ，从而 $\bar{z} = -i$ ，故虚部为 -1。故选 D。

3. D 【解析】由题意可知列举可知，甲乙游玩的可能选择是：(三清山，三清山)、(三清山，婺源)、(三清山，葛仙山)、(婺源，三清山)、(婺源，婺源)、(婺源，葛仙山)、(葛仙山，三清山)、(葛仙山，婺源)、(葛仙山，葛仙山) 共有 9 种，满足题意的有 5 种，故答案是 D。

4. C 【解析】因为 \vec{a}, \vec{b} 是单位向量，由 $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{3}$

$$> (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3$$
，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ ；
 设 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 θ ，则 \vec{a} 与 $2\vec{b}$ 的夹角也为 θ ；

则 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$ ，又 $\theta \in [0, \pi]$ ，所以 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ，故选 C。

5. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，若 $q = 1$ ，则 $a_1 - a_5 = 15$ ，与题意矛盾，

所以 $q \neq 1$ ，则 $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 30 \\ a_1 - a_5 = a_1 - a_1q^4 = 15 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = 16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ ，所以 $a_7 = a_1q^6 = \frac{1}{4}$ 。

故选 A。

6. B 【解析】由 $\sin \alpha = \sin \beta$ 可知， $\alpha = \beta + 2k\pi$ 或 $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，所以“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”是“ $\alpha + \beta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ ”的必要不充分条件。故选 B。

7. B 【解析】函数 $f(x) = x^4 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ，

因为 $x \in [-1, 2]$ ，所以 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 的值域为 $[-1, 3]$ ，

函数 $g(x) = ax + 2$ 在 $[-1, 2]$ 的值域记为 A，

当 $a \geq 0$ 时, $g(x)$ 值域为 $[-a+2, 2a+2]$;

当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 值域为 $[2a+2, -a+2]$.

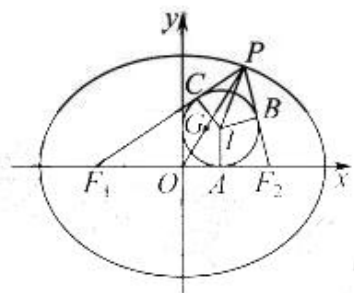
因为对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$, 存在 $x_2 \in [-1, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_2)$,

所以 $A \subseteq [-1, 3] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq -a+2 \leq 3 \\ -1 \leq 2a+2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq a \leq \frac{1}{2}$. 故选 B.

8. D 【解析】由椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 可得 $a = 4, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{16-12} = 2$,

如图, 设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与三边分别相切与 A, B, C ,

G, I 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心和内心,



则 $|PB| = |PC|$, $|FA| = |FC|$, $|F_2A| = |F_2B|$,

所以 $|PB| + |PC| = \frac{|PF_1| + |PF_2| - |F_1F_2|}{2} = a - c$.

所以 $\vec{PI} \cdot \vec{PG} = \vec{PG} \cdot \vec{PI} = \frac{2}{3} \vec{PO} \cdot \vec{PI} = \frac{1}{3} (\vec{PF}_1 + \vec{PF}_2) \cdot \vec{PI} = \frac{1}{3} (\vec{PF}_1 \cdot \vec{PI} + \vec{PF}_2 \cdot \vec{PI})$

$= \frac{1}{3} (|\vec{PF}_1| \cos \angle C + |\vec{PF}_2| \cos \angle B) = \frac{1}{3} |\vec{PB}| (|\vec{PF}_1| + |\vec{PF}_2|)$

$= \frac{1}{3} (a - c) \cdot 2a = \frac{16}{3}$ 故选: D

9. C 【解析】依题意, 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, 方程为 $x^2 - y^2 = 1$, 是双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 在第一

象限的部分; 来源: 高三答案公众号

当 $x < 0, y \geq 0$ 时, 方程为 $-x^2 - y^2 = 1$, 不能表示任何曲线;

当 $x < 0, y < 0$ 时, 方程为 $y^2 - x^2 = 1$, 是双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 在第三象限的部分;

当 $x \geq 0, y < 0$, 方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 在第四象限的部分;

其图象大致如图所示:

在 $Rt\triangle PDA$ 中, 因为 $PD^2 + AD^2 = PA^2$, 解得 $PD = 2\sqrt{2}$,

设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径 R , 即 $OP = OA = R$, $OD = 2\sqrt{2} - R$,

在 $\triangle ODA$ 中, 由勾股定理得 $OD^2 + DA^2 = OA^2 \Rightarrow (2\sqrt{2} - R)^2 + 2^2 = R^2$,

解得 $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为 $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

根据球体的体积公式 $S = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi(\frac{3\sqrt{2}}{2})^3}{3} = 9\sqrt{2}\pi$, 故选 C.

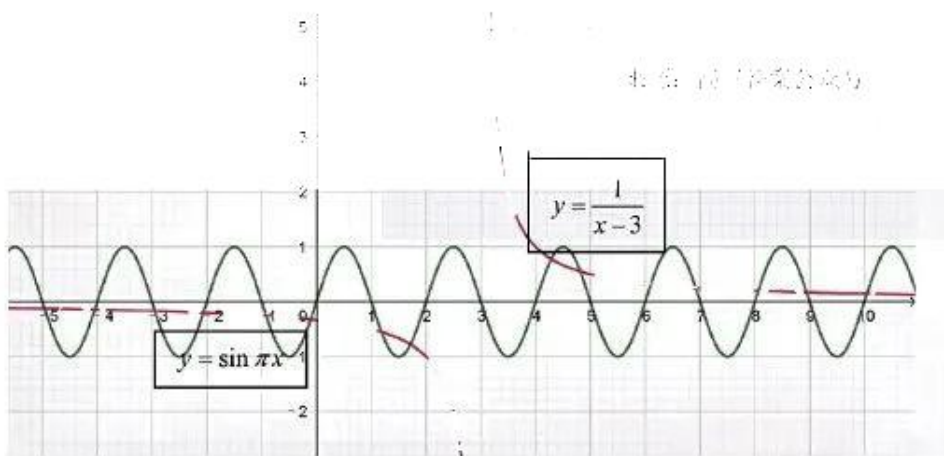
11. B 【解析】由题意可得:

$$f(x) = 2 - \frac{2x-5}{x-3} + \sin(1-x)\pi = \frac{2x-6-(2x-5)}{x-3} + \sin(\pi - \pi x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x-3} + \sin \pi x = 0$$

可得 $\sin \pi x = \frac{1}{x-3}$ ($x \neq 3$),

$\therefore y = \sin \pi x$ 与 $y = \frac{1}{x-3}$ 关于点 $(3, 0)$ 对称.

由图可知



根据对称性得 $x_1 + x_6 = x_2 + x_5 = x_3 + x_4 = 6$,

故函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}]$ 上所有零点之和为 $3 \times 6 = 18$. 故选 B.

12. A 【解析】由题意可得:

$$\because \frac{c}{a} = \frac{\sin \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} \cos \frac{1}{5}} = 5 \tan \frac{1}{5}, \text{ 利用三角函数线可得当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } \tan x > x$$

$$\Rightarrow 5 \tan \frac{1}{5} > 5 \cdot \frac{1}{5} = 1, \therefore c > a$$

$$\text{构造函数 } H(x) = x \cos x - x(1-x) = x \cdot (\cos x + x - 1)$$

$$\therefore H(0) = 0, H\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \cos \frac{1}{5} - \frac{4}{25}, \text{ 即 } H\left(\frac{1}{5}\right) = a - b,$$

$$\text{令 } G(x) = \cos x + x - 1 \Rightarrow G'(x) = -\sin x + 1 > 0$$

$$\therefore G(x) = \cos x + x - 1 \text{ 在 } R \text{ 上单调递增, 即 } G(0) < G\left(\frac{1}{5}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{5}G(0) < \frac{1}{5}G\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow H(0) < H\left(\frac{1}{5}\right), \therefore 0 < a - b \Rightarrow b < a. \therefore b < a < c.$$

故选 A.

13. $y = \frac{1}{e}x$ 【解析】由题意可得

设该直线方程 $y = kx$, 且与 $y = \ln x$ 相切于点 (x_0, y_0) ;

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0 = kx_0 \\ y_0 = \ln x_0 \\ k = f'(x_0) \Rightarrow k = \frac{1}{x_0} \end{cases} \Rightarrow \ln x_0 = 1 \quad \therefore x_0 = e \Rightarrow k = \frac{1}{e} \therefore y = \frac{1}{e}x.$$

14. $-\frac{5}{9}$ 【解析】由题意可得:

$$\begin{aligned} \therefore \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \pi\right] = -\cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\left[1 - 2\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right] = -1 + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = -\frac{5}{9}. \end{aligned}$$

15. $3 + 2\sqrt{2}$ 【解析】由题意可得:

$$\text{由余弦定理可知: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}, \therefore A = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{由等面积法可知: } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} \Rightarrow \frac{1}{2}bc \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}b \cdot AD$$

$$\therefore bc = c + 2b \Rightarrow 1 = \frac{1}{b} + \frac{2}{c}$$

$$\therefore b + c = (b+c) \cdot 1 = (b+c) \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right) = 1 + \frac{2b}{c} + \frac{c}{b} + 2$$

$$= 3 + \frac{2b}{c} + \frac{c}{b} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 3 + 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } c = \sqrt{2}b \text{ 等式成立.}$$

16. $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right)$

【解析】由题意可得：

曲线 $D: |y| = m^{x^2} + 1$, 令 $x = 2 \Rightarrow |y| = 2 \therefore y = \pm 2$, 则不妨设 $P(2, 2), Q(2, -2)$,

该两点都在椭圆 C 上 \therefore 满足 $\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ 由椭圆的对称性可知 $|QF_2| = |PF_2|$

\therefore 由题 $|PF_1| + |QF_2| > 8$ 等价于 $|PF_1| + |PF_2| > 8$

$\therefore 2a > 8$ 即 $a > 4$

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \because \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow 4 + \frac{4a^2}{b^2} = a^2 > 16 \therefore \frac{a^2}{b^2} > 3$$

$$\text{从而 } 0 < \frac{b^2}{a^2} < \frac{1}{3} \Rightarrow e \in \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right), \text{ 故答案 } \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right)$$

17. 【解析】(1) 设由分层抽样可得分数在 $[70, 80)$ 的人数与分数在 $[80, 90)$ 的人数之比

为 3: 5, 所以 $3:5=0.006: x$, 则 $x=0.01$2 分

由频率分布直方图可知, 分数在 $[70, 80)$ 的频率为 $0.006 \times 10 = 0.06$,

$$x = \frac{1 - (0.04 + 0.06 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.3)}{10} = 0.014 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

又由频率分布直方图可知分数在 $[60, 70)$ 的频率为 0.04, 分数在 $[70, 80)$ 的频率为 0.06,

分数在 $[80, 90)$ 的频率为 0.1, 分数在 $[90, 100)$ 的频率为 0.2, 分数在 $[100, 110)$ 的频率为

0.3, 分数在 $[110, 120)$ 的频率为 0.14, 分数在 $[120, 130)$ 的频率为 0.1, 分数在 $[130, 140)$

的频率为 0.06. 则平均数为

$$= 0.04 \times 65 + 0.06 \times 75 + 0.1 \times 85 + 0.2 \times 95 + 0.3 \times 105 + 0.14 \times 115 + 0.1 \times 125 + 0.06 \times 135 = 102.8 \text{ 分} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 由题意可知分数在 $[130, 140)$ 的频率为 6%, 所以前 5% 在该组, 不妨设第 5% 名的

分数为 x_0 , 则可得等式为

$$(140 - x_0) \bullet 0.006 = 5\% \Rightarrow (140 - x_0) \bullet 0.006 = 0.05 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore x_0 = 140 - \frac{0.05}{0.006} = 140 - \frac{50}{6} = 131.667 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore x_0 = 131.667 < 132, \text{ 故小明能被选取} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

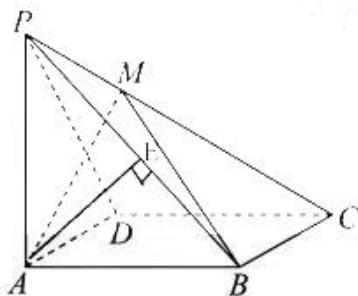
18. 【解析】

$$\begin{aligned}
 (1) \because b_1 &= a_1 + 2^1 - 1 = 3 \text{-----} 1 \text{分} \\
 \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a_{n+1} + 2^{n+1} - 1}{a_n + 2^n - 1} = \frac{3a_n + 2^n - 2 + 2^{n+1} - 1}{a_n + 2^n - 1} \text{-----} 3 \text{分} \\
 &= \frac{3a_n + 3 \times 2^n - 3}{a_n + 2^n - 1} = \frac{3(a_n + 2^n - 1)}{a_n + 2^n - 1} = 3 \text{-----} 5 \text{分}
 \end{aligned}$$

$\therefore \{b_n\}$ 是以首项为 3, 公比为 3 的等比数列.

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 由 (1) 可知 } b_n &= a_n + 2^n - 1 = 3^n \Rightarrow a_n = 3^n - 2^n + 1 \text{-----} 8 \text{分} \\
 \therefore S_n &= (3 + 3^2 + 3^3 + \dots) - (2 + 2^2 + 2^3 + \dots) + n \text{-----} 9 \text{分} \\
 &= \frac{3(1-3^n)}{1-3} - \frac{2(1-2^n)}{1-2} + n \text{-----} 11 \text{分} \\
 &= \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2} + n \text{-----} 12 \text{分}
 \end{aligned}$$

19 【解析】(1) 证明:



如图, 过点 A 作 $AE \perp PB$ 交 PB 于点 E;

$$\left. \begin{array}{l} \because \text{面 } PAB \perp \text{面 } PBC \\ \text{面 } PAB \cap \text{面 } PBC = PB \\ AE \perp PB \\ AE \subset \text{面 } PAB \end{array} \right\} \Rightarrow AE \perp \text{面 } PBC \quad \therefore AE \perp BC \text{-----} 3 \text{分}$$

又因为 $PA \perp \text{面 } ABCD \Rightarrow PA \perp BC$

$$\left. \begin{array}{l} AE \perp BC \\ PA \perp BC \\ AE \cap PA = A \\ AE \subset \text{面 } PAB \\ PA \subset \text{面 } PAB \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp \text{面 } PAB \Rightarrow BC \perp AB \text{-----} 5 \text{分}$$

由题意四边形 $ABCD$ 是菱形 \therefore 四边形 $ABCD$ 是正方形.-----6分

$$(2) \because V_{P-ABM} = \frac{1}{2}V_{C-ABM} = \frac{1}{2}V_{M-ABC} \text{-----8分}$$

$$\text{设点}M\text{到面}ABCD\text{的距离为}h\text{,则}h = \frac{2}{3}PA = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2; \text{-----9分}$$

$$\text{由}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{9}{2} \text{-----10分}$$

$$\therefore V_{P-ABM} = \frac{1}{2}V_{M-ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{3}{2} \text{-----12分}$$

20. 【解析】

$$(1) \text{由}f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 1 \text{定义域为}x \in (0, +\infty) \text{-----1分}$$

$$\text{又}f'(x) = \frac{1 \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2} \text{-----2分}$$

令 $h(x) = 1 - \ln x - x^2$, 显然 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 且 $h(1) = 0$;

\therefore 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.

则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减.-----4分

(2) 法一: \because 任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) + \frac{1}{x} + x \leq ae^x$ 恒成立,

$\therefore -x^2 - x + \ln x \leq axe^x - x^2 - 1$ 恒成立, 且 $a \geq \frac{x - \ln x + 1}{xe^x}$ 恒成立.-----5分

$$\text{令}g(x) = \frac{x + \ln x + 1}{xe^x}, \text{则}g'(x) = \frac{-(x+1)(x + \ln x)}{x^2e^x}.$$

令 $h(x) = x + \ln x$, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, -----6分

$$\because h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0, h(1) = 1 > 0,$$

\therefore 存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使得 $h(x_0) = x_0 + \ln x_0 = 0$, -----8分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0, g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0, g'(x) < 0, g(x)$

单调递减, 由 $x_0 + \ln x_0 = 0$, 可得 $x_0 = -\ln x_0$, -----10分

$$\therefore g(x)_{\max} = g(x_0) = \frac{x_0 + \ln x_0 + 1}{x_0 e^{x_0}} = 1, \text{又}a \geq \frac{x + \ln x + 1}{xe^x}$$

$\therefore a \geq 1$, 故 a 的最小值是1.-----12分

法二:

$\therefore -x^2 + x + \ln x \leq axe^x - x^2 - 1$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{x + \ln x + 1}{xe^x}$ 恒成立. -----5分

令 $g(x) = \frac{x + \ln x + 1}{xe^x} = \frac{x + \ln x + 1}{e^{\ln x} \cdot e^x} = \frac{x + \ln x + 1}{e^{\ln x + x}}$ -----6分

不妨令 $t = x + \ln x (x > 0)$, 显然 $t = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增 $\Rightarrow t \in R$.

$\therefore a \geq \frac{t+1}{e^t}$ 在 $t \in R$ 恒成立.

令 $h(t) = \frac{t+1}{e^t} \Rightarrow h'(t) = \frac{-t}{e^t}$ -----8分

\therefore 当 $t \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(t) > 0$;

当 $t \in (0, +\infty)$ 时, $h'(t) < 0$ 即 $h(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增; $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减. -----10分

$\therefore h(t)_{\max} = h(0) = \frac{0+1}{e^0} = 1$ -----11分

$\therefore a \geq 1$, 故 a 的最小值是 1. -----12分

21. 【解析】 (1) 由题意不妨设直线 $AB: ty = x - \frac{1}{4}$

联立方程组:

$$\begin{cases} x = ty + \frac{1}{4} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2pty - \frac{1}{2}p = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2pt, y_1 y_2 = -\frac{1}{2}p.$$

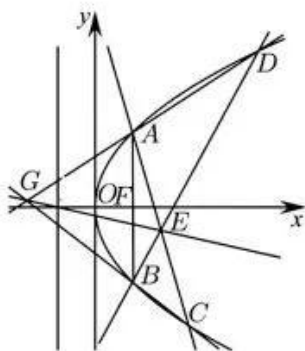
$$y^2 = 2px$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{4p^2 t^2 - 2p} \text{ -----2分}$$

$$= \sqrt{(1+t^2) \cdot (4p^2 t^2 - 2p)} = \sqrt{4p^2 t^4 + (4p^2 + 2p)t^2 + 2p} > \sqrt{2p} \text{ -----4分}$$

$$\therefore \sqrt{2p} = 2 \Rightarrow p = 2 \text{ -----5分}$$

所以抛物线 Γ 的方程为 $y^2 = 4x$;



(2) $A\left(\frac{1}{4}, 1\right), B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$, 由对称性可得, 该定点在 x 轴上, 设 $T(t, 0)$ -----6分

设 $C\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), D\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), y_1 \neq \pm 1, y_2 \neq \pm 1$.

$$\text{直线 AC 为 } y - 1 = \frac{y_1 - 1}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{y_1 + 1} \left(x - \frac{1}{4}\right) \text{ ①,}$$

直线BD为 $y+1 = \frac{y_2+1}{\frac{y_2^2-1}{4}}(x-1) = \frac{4}{y_2-1}\left(x-\frac{1}{4}\right)$ ②,

联立①②, 解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2}\right) \\ y = \frac{y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2} \end{cases}$, 即 $E\left(\frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2}\right), \frac{y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2}\right)$

同理可得 $G\left(\frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_2 + y_1}{y_2 - y_1 + 2}\right), \frac{y_1 + y_2}{y_2 - y_1 + 2}\right)$ -----8分

直线ET的斜率 $K_{ET} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2}\right) - t}$

直线GT的斜率 $K_{GT} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{y_2 - y_1 + 2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_2 + y_1}{y_2 - y_1 + 2}\right) - t}$

$K_{ET} - K_{GT} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2}\right) - t} - \frac{\frac{y_1 + y_2}{y_2 - y_1 + 2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_2 + y_1}{y_2 - y_1 + 2}\right) - t}$ -----9分

当 $y_1 + y_2 \neq 0$ 时, 原式化为

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{y_1 - y_2 + 2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_1 + y_2}{y_1 - y_2 + 2}\right) - t} &= \frac{\frac{1}{y_2 - y_1 + 2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{2y_1y_2 - y_2 + y_1}{y_2 - y_1 + 2}\right) - t} \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{4}(2y_1y_2 - y_1 + y_2) - t(y_1 - y_2 + 2)} &= \frac{1}{\frac{1}{4}(2y_1y_2 - y_2 + y_1) - t(y_2 - y_1 + 2)} \\ \frac{1}{4}(2y_1y_2 - y_1 + y_2) - t(y_1 - y_2 + 2) &= \frac{1}{4}(2y_1y_2 - y_2 + y_1) - t(y_2 - y_1 + 2) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(y_2 - y_1) &= t(2y_1 - 2y_2) \end{aligned}$$

$\therefore t = -\frac{1}{4}$ 即直线EG过定点 $T(-\frac{1}{4}, 0)$ -----11分

又当 $y_1 + y_2 = 0$ 时, 直线EG是x轴, 也过 $T(-\frac{1}{4}, 0)$. -----12分

故直线EG过定点 $T(-\frac{1}{4}, 0)$.

22. 【解析】(1) 由直线 $\begin{cases} x=t \\ y=-1+\sqrt{3}t \end{cases}$, 消去 t 可得 $y=\sqrt{3}x-1$ -----2分

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta+2\cos\theta$, 即 $\rho^2=2\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$,

转换为直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x+2y$, 整理得 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ -----5分.

(2) 点 $P(0,-1)$ 在直线 l 上, 将直线 l 的参数方程化为标准参数方程

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t-1 \end{cases} \text{-----6分}$$

代入 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 中,

$$\text{得到} \left(\frac{1}{2}t-1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-2\right)^2 = 2, \text{ 化简得: } t^2 - (1+2\sqrt{3})t + 3 = 0,$$

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

$$\therefore t_1+t_2=1+2\sqrt{3}, t_1t_2=3, \text{ 故 } t_1, t_2 > 0 \text{-----8分}$$

$$\text{故} \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \left| \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right| = \left| \frac{t_1+t_2}{t_1 \cdot t_2} \right| = \frac{1+2\sqrt{3}}{3} \text{-----10分}$$

23. 【解析】(1) 由题知 $f(x) = \begin{cases} -x+3, x \leq -1 \\ -3x+1, -1 < x < 1 \\ x-3, x \geq 1 \end{cases}$ -----3分

易知: 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in [1, +\infty)$ 时 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x) \geq f(1) = -2$, 即 $f(x)$ 的最小值为 -2 , 即 $m = -2$. -----5分

(2)由(1)可得 $a+b+c=2$

$$\text{又由} \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \geq 3 \text{-----6分}$$

$$\sqrt{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}} \geq \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right) \cdot 1 = \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right) \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot (a+b+c) \text{-----8分}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 3 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 9$$

$$\text{故} \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6 \text{当且仅当} a=b=c \text{等式成立}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线