北京市西城区高三统一测试

数学（文科）

2019.5

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．设集合 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x\,|\,x<0$ 或 $x>2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{x\,|\,x<0$ 或 $2<x<3\}$（B）$\{x\,|\,2<x<3\}$

（C）$\{x\,|\,x<0$ 或 $x>1\}$　　（D）$\{x\,|\,0<x<1$ 或 $2<x<3\}$

2．若复数 $z=\mathrm{i}\cdot(a-\mathrm{i})$ 满足 $|z|=2$，则实数 $a=$

（A）$\sqrt{3}$　　（B）1

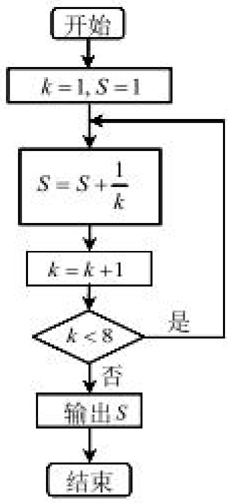
（C）$-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$　　（D）-1 或 1

3．以点 $A(1,-2)$ 为圆心，且与直线 $x+y=0$ 相切的圆的方程是

（A）$(x-1)^2+(y+2)^2=\dfrac{1}{2}$　　（C）$(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{2}$

（B）$(x-1)^2+(y+2)^2=\dfrac{9}{2}$　　（D）$(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{2}$

4. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值等于



(A) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{8}$

(B) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{7}$

(C) $1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{8}$

(D) $1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{7}$

5. 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=60$ ，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{3}$

（C）$\sqrt{10}$　　（D）12

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则“函数 $y=|f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”是“函数 $f(x)$ 为奇函数”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7. 若实数 x，y，z 互不相等，且满足 $2^x=3^y=\log_4 z$，则

(A) $z>x>y$　　(B) $z>y>x$

(C) $x>y, x>z$　　(D) $z>x, z>y$

8. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，平面α 与该正四面体相交．对于实数 $d(0<d<1)$，记正四面体 $ABCD$ 的四个顶点中到平面α 的距离等于 d 的点的个数为 m，那么下列结论中正确的是

（A）m 不可能等于 2　　（B）m 不可能等于 3

（C）m 不可能等于 4　　（D）以上三个答案都不正确

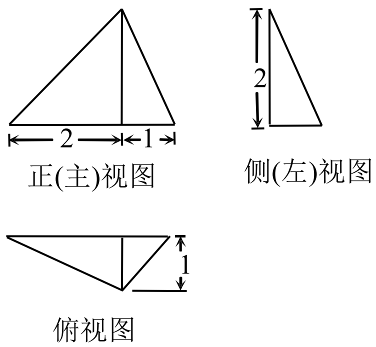
第II卷（非选择题　共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

9．设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geq 0 \\ x+2y+1\geq 0 \\ x-2\leq 0 \end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最大值为____．

10．以椭圆 $C:\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 在 x 轴上的顶点和焦点分别为焦点和顶点的双曲线方程为_；该双曲线的渐近线方程为___．

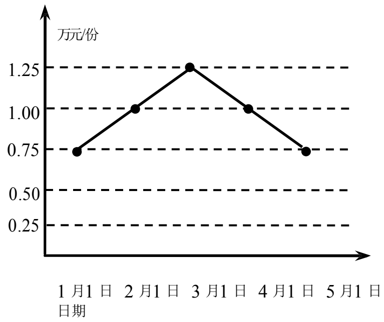
11．某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥中最长棱的长度为____．



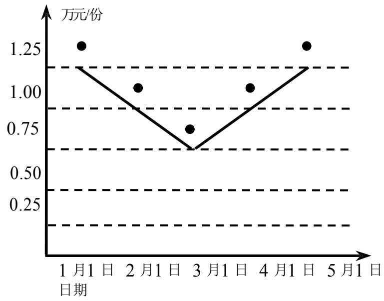
12．若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)\,(\varphi>0)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 上单调递减，则 φ 的最小值为___．

13．能说明“设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，若 $a_{n+1}>a_n$，则 $S_{n+1}>S_n$”为假命题的一个等差数列是____．（写出数列的通项公式）

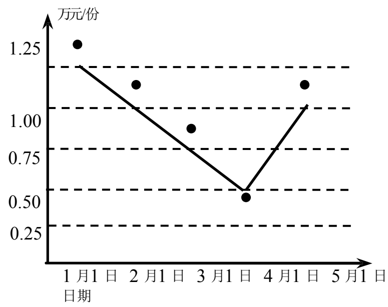
14．因市场战略储备的需要，某公司从1月1日起每月1日购买了相同金额的某种物资，连续购买了4次．由于市场变化，5月1日该公司不得不将此物资全部卖出．已知该物资的购买和卖出都是以份为计价单位进行交易，且该公司在买卖的过程中没有亏本，那么下面三个折线图中反映了这种物资每份价格（单位：万元）的可能变化情况的是____．（写出所有正确的图表序号）



图①



图②



图③

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）
在△ABC 中，已知 $a=\sqrt{2}b, b=\sqrt{2}c$

（Ⅰ）求 $\cos A$ 的值；

（Ⅱ）若 $b=2$，求△ABC 的面积．

16．（本小题满分 13 分）
已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=p-2^{3-n}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）求 p 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）判断数列 $\{a_n^2\}$ 和 $\{na_n\}$ 是否为等比数列？证明你的结论．

17．（本小题满分 13 分）

10 月 1 日，某品牌的两款最新手机（记为 W 型号，T 型号）同时投放市场．手机厂商为了解这两款手机的销售情况，在 10 月 1 日当天，随机调查了 5 个手机店中这两款手机的销量（单位：部），得到下表．

手机店	A	B	C	D	E
W 型号手机销量	6	6	13	8	11
T 型号手机销量	12	9	13	6	4

（Ⅰ）已知在 10 月 1 日当天，这两款最新手机的全国销售量约为 10 万部，试根据表中数据估计 W 型号手机 10 月 1 日当天的全国销量；

（Ⅱ）该手机厂商计划从这 5 个手机店中任选 2 个对 W 型号手机进行大规模宣传，求恰好选中 B 手机店的概率；

（Ⅲ）经测算，W 型号手机的销售成本η（百元）与销量ξ（部）满足关系$\eta=3\xi+4$．若表中 W 型号手机销量的方差 $s_0^2=m\ (m>0)$，试给出表中 5 个手机店的 W 型号手机销售成本的方差 s^2 的值．（用 m 表示，结论不要求证明）

注：$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2]$ 其中 $\overline{x}$ 为数据 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的平均数

18.（本小题满分 14 分）

如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中，O 为 AD 的中点，$BO \perp AD$．将三角形 ABO 沿 BO 折起到 A_1BO 位置，如图 2．

（Ⅰ）求证：$BO \perp A_1D$；

（Ⅱ）若 M 为 A_1B 的中点，求证：$MO /\!/$ 平面 A_1CD；

（Ⅲ）判断平面 A_1OD 能否垂直于平面 A_1CD？证明你的结论．

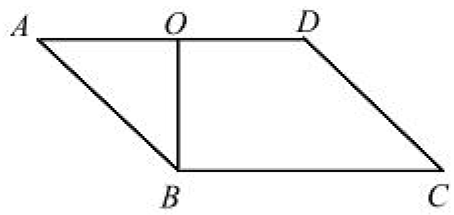


图 1

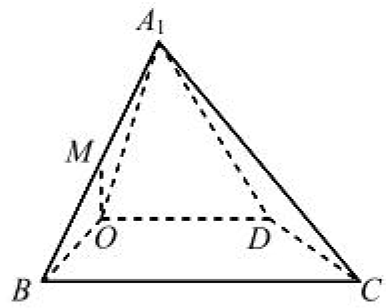


图 2

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右顶点为 A，左焦点为 F．斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 相切于点 B，且点 B 在第一象限.

（Ⅰ）若 $k = -1$，求直线 l 的方程；

（Ⅱ）直线 AB 交 y 轴于点 P，过点 A 且平行于 l 的直线与 y 轴交于点 Q，证明：$\triangle PQF$ 为等腰三角形.

20.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x) = x(\ln x + 1)$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线不经过原点；

（Ⅲ）设整数 k 使得 $f(x) \ge k(x - \dfrac{1}{2})$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，求整数 k 的最大值.

北京市西城区高三模拟测试

数学（文科）参考答案及评分标准　　2019.5

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．B	2．C	3．A	4．D
5．B	6．B	7．D	8．D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．11	10．$x^2-\frac{y^2}{4}=1$，$y=\pm 2x$	11．3
12．$\frac{\pi}{2}$	13．答案不唯一，如 $a_n=n-4$	14．② ③

注：第 10 题第一问 2 分，第二问 3 分．第 14 题漏选、多选或错选均不得分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $a=\sqrt{2}b$，$b=\sqrt{2}c$，得 $a=\sqrt{2}b=2c$．

根据余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2ab\cos A$，　　………………… 3 分

得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(\sqrt{2}c)^2+c^2-(2c)^2}{2\times(\sqrt{2}c)\times c}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．

即 $\cos A=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．　　………………… 6 分

（Ⅱ）因为 $\cos A=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$A\in(0,\pi)$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$．　　………………… 9 分

由 $b=2$，得 $c=\sqrt{2}$．　　………………… 10 分

所以△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．　　………………… 13 分

16．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $S_n=p-2^{3-n}$，得 $S_1=a_1=p-4$，$S_2=a_1+a_2=p-2$，$S_3=a_1+a_2+a_3=p-1$，

所以 $a_1=p-4$，$a_2=2$，$a_3=1$. ·················· 3 分

因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以公比 $q=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{a_2}{a_1}=q$，

故 $p=8$，$a_1=4$. ·················· 5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a_1\times q^{n-1}=2^{3-n}$. ·················· 7 分

（Ⅱ）结论：数列 $\{a_n^2\}$ 是等比数列，数列 $\{na_n\}$ 不是等比数列. ·················· 9 分

证明如下：

由（Ⅰ），得 $a_n^2=(2^{3-n})^2=4^{3-n}$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\dfrac{4^{2-n}}{4^{3-n}}=\dfrac{1}{4}$，

所以数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 16，公比为 $\dfrac{1}{4}$ 等比数列. ·················· 11 分

由（Ⅰ），得 $na_n=n\times 2^{3-n}$，

所以数列 $\{na_n\}$ 的前三项分别为 4，4，3，它们构不成等比数列，

所以数列 $\{na_n\}$ 不是等比数列. ·················· 13 分

17.（本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）在 10 月 1 日当天，所调查的 5 个店的 W 型号手机总销售量为 $6+6+13+8+11=44$（部），

T 型号手机总销售量为 $12+9+13+6+4=44$（部）， ·················· 1 分

故所调查的 5 个店的 W 型号手机在这两款手机中的销售频率为 $\dfrac{44}{44+44}=\dfrac{1}{2}$，

·················· 2 分

所以 W 型号手机 10 月 1 日的全国销售量约为 $10\times\dfrac{1}{2}=5$（万部）. ············ 4 分

（Ⅱ）设事件:“从这 5 个手机店中任选 2 个，恰好选中 B 手机店”为 M， ········· 5 分

则从这 5 个手机店中任选 2 个，所有可能结果有 10 种，即 (A,B)，(A,C)，(A,D)，(A,E)，(B,C)，(B,D)，(B,E)，(C,D)，(C,E)，(D,E). ·················· 7 分

而事件 M 的结果有 4 种，它们是 (A,B)，(B,C)，(B,D)，(B,E). ············ 8 分

所以 $P(M)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

即从这 5 个手机店中任选 2 个，恰好选中 B 手机店的概率为 $\frac{2}{5}$. ………………… 10 分

（Ⅲ）$s^2=9m$. ………………… 13 分

18.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）在图 1 中，因为 $BO\perp AD$，

所以在图 2 中 $BO\perp A_1O$，$BO\perp OD$. ………………… 1 分

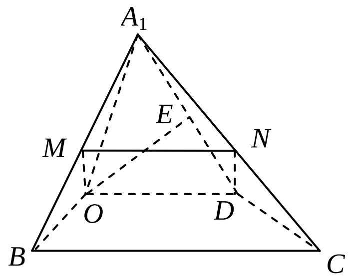
又因为 $A_1O\cap OD=O$，

所以 $BO\perp$ 平面 A_1OD. ………………… 3 分

又因为 $A_1D\subset$ 平面 A_1OD，

所以 $BO\perp A_1D$. ………………… 4 分

（Ⅱ）如图，取 A_1C 中点 N，连接 MN，DN.



因为 M 为 A_1B 中点，

所以 $MN/\!/BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$.

又因为 $OD/\!/BC$，$OD=\frac{1}{2}BC$，

所以 $MN/\!/OD$，$MN=OD$.

所以四边形 $OMND$ 为平行四边形. ………………… 6 分

所以 $MO/\!/DN$. ………………… 7 分

又因为 $MO\not\subset$ 平面 A_1CD，$DN\subset$ 平面 A_1CD，

所以 $MO/\!/$ 平面 A_1CD. ………………… 9 分

（Ⅲ）结论：平面 A_1OD 不可能垂直于平面 A_1CD. ………………… 10 分

证明如下：

假设平面 $A_1OD\perp$ 平面 A_1CD.

在平面 A_1OD 内过 O 作 $OE\perp A_1D$ 于 E，因为平面 $A_1OD\cap$ 平面 $A_1CD=A_1D$，

所以 $OE \perp$ 平面 A_1CD. ………………… 11 分

又因为 $CD \subset$ 平面 A_1CD，

所以 $OE \perp CD$.

由（Ⅰ）知 $BO \perp$ 平面 A_1OD，所以 $BO \perp OE$.

又因为 BO 与 CD 相交，BO，$CD \subset$ 平面 $OBCD$，

所以 $OE \perp$ 平面 $OBCD$. ………………… 13 分

故 OE 同时垂直于两个相交平面 $OBCD$ 和 A_1CD，

这显然不成立，故假设不成立.

所以平面 A_1OD 不可能垂直于平面 A_1CD. ………………… 14 分

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，设直线 l 的方程为 $y = kx + m$， ………………… 1 分

联立方程 $\begin{cases} y = kx + m \\ \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$，消去 y，得 $(2k^2+1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$. …… 3 分

因为直线 l 与椭圆相切，

所以 $\Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2+1)(2m^2-2) = 0$，即 $m^2 = 2k^2 + 1$. ………………… 4 分

设 $B(x_0, y_0)$，则 $x_0 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-4km}{2k^2+1} = \dfrac{-2km}{2k^2+1} = \dfrac{-2k}{m}$，$y_0 = kx_0 + m = \dfrac{-2k^2+m^2}{m} = \dfrac{1}{m}$.

所以 $B(\dfrac{-2k}{m}, \dfrac{1}{m})$. ………………… 6 分

由点 B 在第一象限，得 $\dfrac{-2k}{m} > 0$，$\dfrac{1}{m} > 0$，即 $m > 0$，$k < 0$.

若 $k = -1$，则 $m = \sqrt{2k^2+1} = \sqrt{3}$.

所以直线 l 的方程为 $y = -x + \sqrt{3}$. ………………… 8 分

（注：如直接设 l 的方程为 $y = -x + m$ 来解决问题，此问最多给到 6 分.）

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $m^2 = 2k^2 + 1$，$B(\dfrac{-2k}{m}, \dfrac{1}{m})$.

由 $A(\sqrt{2},0)$，得直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{\frac{1}{m}}{\frac{-2k}{m}-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{-2k-\sqrt{2}m}$，

所以直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{1}{-2k-\sqrt{2}m}(x-\sqrt{2})$.

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}k+m}$，所以 $P(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}k+m})$. ………………… 10 分

因为直线 $AQ \mathbin{/\mkern-6mu/} l$，所以设直线 AQ 的方程为 $y=k(x-\sqrt{2})$.

令 $x=0$，得 $y=-\sqrt{2}k$，所以 $Q(0,-\sqrt{2}k)$. ………………… 11 分

所以 $|PQ|=|\dfrac{1}{\sqrt{2}k+m}+\sqrt{2}k|=|\dfrac{2k^2+\sqrt{2}km+1}{\sqrt{2}k+m}|=|\dfrac{m^2+\sqrt{2}km}{\sqrt{2}k+m}|=|m|$. ………… 13 分

又因为 $|QF|=\sqrt{2k^2+1}=\sqrt{m^2}=|m|=|PQ|$，

所以△ PQF 为等腰三角形. ………………… 14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）求导，得 $f'(x)=2+\ln x$， ………………… 1 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\mathrm{e}^{-2}$.

由 $f'(x)>0$，得 $x>\mathrm{e}^{-2}$，所以 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e}^{-2},+\infty)$ 上单调递增. ………………… 2 分

由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\mathrm{e}^{-2}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{-2})$ 上单调递减. ………………… 4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，

其中 $x_0>0$. ………………… 5 分

假设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线经过原点，

则有 $0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)$，即 $-x_0(\ln x_0+1)=(2+\ln x_0)(-x_0)$，

整理得 $x_0=0$，这与 $x_0>0$ 矛盾，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线不经过原点. ………………… 8 分

（III）“$f(x)\geqslant k(x-\frac{1}{2})$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立”等价于“当 $x>0$ 时，$f(x)-k(x-\frac{1}{2})\geqslant 0$ 恒成立”.

令 $g(x)=f(x)-k(x-\frac{1}{2})=x\ln x+(1-k)x+\frac{1}{2}k$， ……………… 9 分

求导，得 $g'(x)=\ln x+2-k$，

由 $g'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}^{k-2}$.

随着 x 变化，$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(0,\mathrm{e}^{k-2})$	e^{k-2}	$(\mathrm{e}^{k-2},+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{k-2})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e}^{k-2},+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $g(x)$ 的最小值 $g(\mathrm{e}^{k-2})=\frac{1}{2}k-\mathrm{e}^{k-2}\geqslant 0$. ……………… 11 分

令 $h(k)=\frac{1}{2}k-\mathrm{e}^{k-2}$，则 $h(2)=\frac{1}{2}\times 2-\mathrm{e}^{2-2}=0$，

当 $k=2$ 时，

因为 $g(x)$ 的最小值 $g(\mathrm{e}^{k-2})=g(1)=0$，

所以 $f(x)\geqslant k(x-\frac{1}{2})$ 对于 $x>0$ 恒成立，符合题意； ……………… 12 分

当 $k>2$ 时，

由 $h'(k)=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{k-2}<\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{2-2}<0$，得函数 $h(k)=\frac{1}{2}k-\mathrm{e}^{k-2}$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递减，

所以 $h(k)<h(2)=0$，

故此时 $g(x)$ 的最小值 $g(\mathrm{e}^{k-2})=h(k)<0$，不符合题意.

所以整数 k 的最大值是 2. ……………… 13 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注