河南省高三金太阳名校联考入学摸底考试
数学参考答案

1. D　因为 $N=\{x|x^2-5x+6>0\}=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$，
所以 $M\cap N=\{-3,-2,-1,0,1\}$.

2. A　因为 $z=\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}=\dfrac{(\sqrt{2}-\mathrm{i})(\sqrt{2}-\mathrm{i})}{(\sqrt{2}+\mathrm{i})(\sqrt{2}-\mathrm{i})}=\dfrac{1-2\sqrt{2}\mathrm{i}}{3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$，

所以 $\bar{z}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$，即 $z+\bar{z}=\dfrac{2}{3}$.

3. A　$b=(\dfrac{1}{2})^{\frac{5}{3}}<(\dfrac{1}{2})^{\frac{3}{5}}=a<1$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{5}=\log_3 5>1$，故 $b<a<c$.

4. D　$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EA})\cdot\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC})=-\dfrac{9}{2}$.

5. C　数据波动越大，方差越大. 原样本数据的平均数为 100，添加新数据 $x_7=100$ 后，新样本的数据更集中，$s_0^2>s_1^2$. 添加新数据 $x_7=33$ 后，新样本的数据波动更大，$s_2^2>s_0^2$.

6. C　若 $m/\!/\beta$，则 $m\perp n$，所以 $\alpha\perp\beta$，C 错误.

7. B　因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi\omega}{2}+\dfrac{\pi}{3})$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上没有零点，所以 $\dfrac{\pi\omega}{2}+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\pi$，解得 $\omega\leqslant\dfrac{4}{3}$. 又因为 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant\dfrac{4}{3}$.

8. B　设矩形在第一象限的顶点坐标为 (x,y)，根据对称性知该矩形的面积 $S_{ABCD}=4xy=4a\cdot\dfrac{x}{a}\cdot y\leqslant 2a(\dfrac{x^2}{a^2}+y^2)=2a$，当且仅当 $\dfrac{x}{a}=y$ 时，等号成立，即 $S=2a$，所以 $4\leqslant 2a\leqslant 6$，解得 $2\leqslant a\leqslant 3$.

9. ACD　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，A 正确.

$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\dfrac{4}{5}$，C 正确.

因为 $0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin(\beta-\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\beta-\alpha)}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，B 错误.

$\cos\alpha=\cos[\beta-(\beta-\alpha)]=\cos\beta\cos(\beta-\alpha)+\sin\beta\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

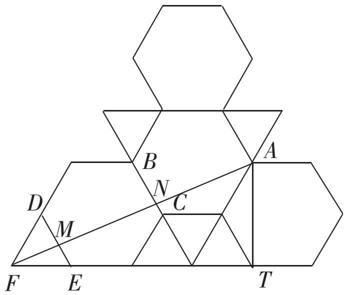
所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，D 正确.

10. ABD　令 $x=y=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$，A 正确.
令 $y=-x$，则 $f(x-x)=f(x)+f(-x)=0$，所以 $f(x)$ 是奇函数，B 正确.
$f(x)$ 是奇函数，$x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极小值点，C 错误.
令 $y=1$，则 $f(x+1)=f(x)+1$，$f(2023)=f(2022)+1=f(2021)+2=f(2020)+3=\cdots=$

$f(1)+2022=2023$,D 正确.

11. BCD　$f'(x)=\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}$. 令 $f'(x)<0$,解得 $0<x<3$ 或 $3<x<6$,令 $f'(x)>0$,解得 $x<0$ 或 $x>6$,所以 $f(x)$在$(0,3)$,$(3,6)$上单调递减,在$(-\infty,0)$,$(6,+\infty)$上单调递增,A 错误.
$f(0)=0$,$f'(0)=0$,曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=0$,即曲线 $y=f(x)$与 x 轴相切,C 正确. $f(x)_{极小值}=f(6)=12$,$f(x)_{极大值}=f(0)=0$,$f(x)$的值域为$(-\infty,0]\cup[12,+\infty)$,D 正确. $f(3-x)+f(3+x)=12$,所以 $f(x)$的图象关于点$(3,6)$对称,B 正确.

12. BCD　该半正多面体的表面积为 $4\times(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times3^2-3\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2)+4\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=7\sqrt{3}$,A 错误.



该半正多面体所在的正四面体的高为$\sqrt{6}$,体积为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times3^2\times\sqrt{6}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. 该半正多面体的体积为$\dfrac{9\sqrt{2}}{4}-4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{23\sqrt{2}}{12}$,B 正确.

该半正多面体外接球的球心即其所在正四面体的外接球的球心,记球心为 O,则 $OA^2=(\dfrac{\sqrt{6}}{4})^2+1^2=\dfrac{11}{8}$,故该半正多面体外接球的表面积为 $4\pi\cdot OA^2=\dfrac{11\pi}{2}$,C 正确.

该半正多面体的展开图如图所示,$FT=4$,$AT=\sqrt{3}$,$AF=\sqrt{FT^2+AT^2}=\sqrt{19}$,$FM+MN+AN\geqslant AF=\sqrt{19}$,D 正确.

13. $4\sqrt{2}$　由题意得$\dfrac{c}{a}=3$,则 $c=3$,$b=\sqrt{c^2-a^2}=2\sqrt{2}$,故虚轴长 $2b=4\sqrt{2}$.

14. 108　可以组成 $C_3^2C_3^2C_2^1A_3^3=108$ 个没有重复数字的四位偶数.

15. $10+2\sqrt{5}$　$\triangle MNP$ 的周长为$|MP|+|MN|+|PN|$,$|PN|=\sqrt{|MN|^2-|MP|^2}=\sqrt{|MN|^2-16}$,所以$|MN|$越小,$|PN|$越小.
当 $MN\perp l$ 时,$|MN|$最小. 圆心 M 到直线 l 的距离为$\dfrac{|3\times5+4\times5-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6$,所以$|MN|$的最小值为 6,此时,$|PN|=2\sqrt{5}$,$|MP|+|MN|+|PN|=10+2\sqrt{5}$. 故$\triangle MNP$ 的周长的最小值为 $10+2\sqrt{5}$.

16. $(0,\dfrac{5}{3}]$　$S_n=\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n}$,$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$,

两式相减可得$\dfrac{1}{2}S_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=1+\dfrac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{n+3}{2^{n+1}}$,所以 $S_n=3-\dfrac{n+3}{2^n}$.

因为 $a_n=\frac{n+1}{2^n}>0$,所以 $S_n\geqslant S_1=1$. 因为$\frac{n+3}{2^n}>0$,所以 $3-\frac{n+3}{2^n}<3$,所以 $1\leqslant S_n<3$.

因为 $0<tS_n<5$,所以 $0<t\leqslant\frac{5}{3}$.

17. 解:(1)设$\triangle ABC$内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.

因为$\sqrt{7}\sin A+\sqrt{7}\sin B=5\sin C$,所以$\sqrt{7}(a+b)=5c$. ………………………………… 2 分

因为 $a+b+c=10+2\sqrt{7}$,所以 $AB=c=2\sqrt{7}$. ………………………………………… 4 分

(2)因为$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=12\sin C$,且 $\sin C\neq 0$,所以 $ab=24$. …………… 6 分

由(1)可得 $a+b=10$.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=52$. …………………………………………………………… 7 分

由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{52-28}{48}=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 9 分

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

18. 解:以 D 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系.

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,则 $A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,2,0)$,$F(1,0,2)$,$E(0,0,1)$,$B_1(2,2,2)$. ………………………………………………………………… 2 分

$\overrightarrow{AF}=(-1,0,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{EB_1}=(2,2,1)$. …………………………………… 3 分

(1)证明:因为$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0$,所以 $AF\perp EB_1$,$AC\perp EB_1$. ……………… 5 分

因为 $AF\cap AC=A$,所以 $B_1E\perp$平面 ACF. ………………………………………………… 7 分

(2)结合(1)可得$\overrightarrow{EB_1}$为平面 ACF 的一个法向量.

$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$. ………………………………………………………………………… 8 分

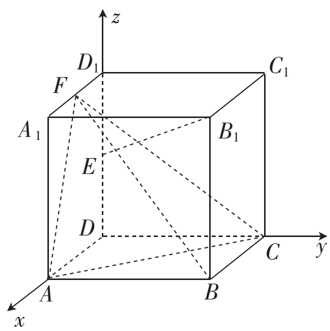
设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2y=0,\\ -x+2z=0.\end{cases}$

取 $x=2$,得 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$. …………………………………… 10 分

$\cos\langle\overrightarrow{EB_1},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{EB_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{EB_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故二面角 $B-AF-C$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$. …………………………… 12 分



注:第(1)问若不建系,证法如下:

连接 A_1E,BD,B_1D_1(图略).

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$B_1B\perp$平面 $ABCD$,所以 $B_1B\perp AC$.

因为 $BD\perp AC$,$B_1B\cap BD=B$,所以 $AC\perp$平面 B_1BDD_1.

因为 $EB_1\subset$平面 B_1BDD_1,所以 $AC\perp EB_1$. ………………………………………………… 2 分

因为 $A_1B_1\perp$平面 ADD_1A_1,所以 $A_1B_1\perp AF$.

在正方形 ADD_1A_1，E，F 分别是边 DD_1，A_1D_1 的中点，可得$\triangle A_1AF\cong\triangle D_1A_1E$，

所以$\angle A_1AF=\angle D_1A_1E$，$\angle EA_1A+\angle A_1AF=\angle EA_1A+\angle D_1A_1E=90^\circ$，所以 $AF\perp A_1E$.

………………………………………………………………………… 4 分

因为 $A_1B_1\cap A_1E=A_1$，所以 $AF\perp$平面 A_1B_1E.

因为 $EB_1\subset$平面 A_1B_1E，所以 $AF\perp EB_1$.

因为 $AC\cap AF=A$，所以 $B_1E\perp$平面 ACF. ………………………………………… 5 分

19. 解：(1)因为 $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$，所以$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n}$，………………… 2 分

即$\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{a_1}{1}+1=2$，可得 $a_n=2n-1$. ………………………………… 5 分

(2)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n.

b_n 为$\{a_n\}$中的 n 项之和，T_n 为$\{a_n\}$中的前$\dfrac{(1+n)n}{2}$项和. ………………………… 7 分

$S_n=n^2$，$T_n=S_{\frac{(1+n)n}{2}}=[\dfrac{(1+n)n}{2}]^2$. ………………………………………… 10 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=[\dfrac{(1+n)n}{2}]^2-[\dfrac{(n-1)n}{2}]^2=n^3$.

$b_1=a_1=1$ 也满足上式.

故 $b_n=n^3$. ……………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)$F(\dfrac{p_1}{2},0)$，设 $P(\dfrac{y_1^2}{2p_1},y_1)$，…………………………………………… 1 分

则$\begin{cases}\dfrac{p_1}{2}+\dfrac{y_1^2}{2p_1}=2\times 1,\\ y_1=2\times 1,\end{cases}$ ………………………………………………………… 3 分

解得 $p_1=2$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)联立$\begin{cases}y^2=2p_1x,\\ x^2=2p_2y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\sqrt[3]{p_1p_2^2},\\ y=2\sqrt[3]{p_1^2p_2},\end{cases}$

所以 $P(2\sqrt[3]{p_1p_2^2},2\sqrt[3]{p_1^2p_2})$，……………………………………………… 6 分

$k_1=\dfrac{2\sqrt[3]{p_1^2p_2}}{2\sqrt[3]{p_1p_2^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{p_1}{p_2}}$. ………………………………………………… 7 分

设直线 l 的方程为 $y=k_2x+b$.

联立$\begin{cases}y^2=2p_1x,\\ y=k_2x+b,\end{cases}$得 $k_2^2x^2+2(k_2b-p_1)x+b^2=0$，

$\Delta=4(k_2b-p_1)^2-4k_2^2b^2=0$，即 $k_2b-p_1=\pm k_2b$. ………………………………… 8 分

若 $k_2b-p_1=k_2b$，则 $p_1=0$，不符合题意，

所以 $k_2b-p_1=-k_2b$，即 $2k_2b=p_1$①. ………………………………………… 9 分

联立$\begin{cases}x^2=2p_2y,\\ y=k_2x+b,\end{cases}$得 $x^2-2p_2k_2x-2p_2b=0$，

$\Delta=4p_2^2k_2^2+8p_2b=0$，即 $p_2k_2^2+2b=0$②. ………………………………………… 10 分

由①②可得 $k_2=-\sqrt[3]{\dfrac{p_1}{p_2}}$，所以 $k_1+k_2=0$.

故 k_1+k_2 为定值，该定值为 0. ………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)甲只参与一轮比赛的概率为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………… 4 分

(2)$P(X=0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=$

$\dfrac{3}{16}$；……………………………………………………………………………………… 6 分

$P(X=2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{8}$；

……………………………………………………………………………………………… 8 分

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=\dfrac{7}{16}$. ……………………………………………… 10 分

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{7}{16}$	$\dfrac{3}{8}$

$E(X)=\dfrac{7}{16}+2\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{19}{16}$. ……………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)$f(x)=\cos x+x\sin x$，$f(\pi)=-1$. ………………………………………………… 1 分

$f'(x)=x\cos x$，$f'(\pi)=-\pi$. …………………………………………………………………… 3 分

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f(\pi))$ 处的切线方程为 $y+1=-\pi(x-\pi)$，即 $\pi x+y-\pi^2+1=0$. …

……………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)$f'(x)=(a-1)\sin x+ax\cos x$，$f'(0)=0$.

因为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，所以存在 $x_1\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(-x_1,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$. ……………………………………………………………… 5 分

令函数 $g(x)=f'(x)=(a-1)\sin x+ax\cos x$，$g'(x)=(2a-1)\cos x-ax\sin x$，$g'(0)=2a-1$. ………………………………………………………………………………………… 6 分

①若 $g'(0)>0$，即 $a>\dfrac{1}{2}$，则存在 $x_2\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，

即 $f'(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增，从而当 $x\in(0,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，

$f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增，不符合题意. ……………………………………………… 7 分

②若 $g'(0)=0$，即 $a=\dfrac{1}{2}$，则 $g'(x)=-\dfrac{1}{2}x\sin x$.

令函数 $h(x)=g'(x)=-\dfrac{1}{2}x\sin x$，$h'(x)=-\dfrac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$.

当 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递增，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

因为 $h(0)=0$，所以当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时，$h(x)=g'(x)\leqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

因为 $g(0)=f'(0)=0$，所以当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$g(x)=f'(x)>0$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)=f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递增，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，符合题意. ……… 9 分

③若 $g'(0)<0$，即 $a<\frac{1}{2}$，则存在 $x_3\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(-x_3,x_3)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-x_3,x_3)$ 上单调递减.

又因为 $g(0)=f'(0)=0$，所以当 $x\in(-x_3,0)$ 时，$g(x)=f'(x)>0$，当 $x\in(0,x_3)$ 时，$g(x)=f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-x_3,0)$ 上单调递增，在 $(0,x_3)$ 上单调递减，符合题意.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$. ……………………………………………………………… 12 分