2023 年普通高等学校招生全国统一考试

（第二次模拟考试）

# 文科数学参考答案

## 一、选择题

1. B　2. C　3. D　4. B　5. C　6. A　7. B　8. D　9. A　10. A　11. C　12. D

## 二、填空题

13. 1　　14. 30°（或$\frac{\pi}{6}$）　　15. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$　　16. $\sqrt{2}$

## 三、解答题

17. 解：(1) 设$\{a_n\}$的公差为$d$，$\{b_n\}$的公比为$q$，则$a_n=1+(n-1)d$，$b_n=2q^{n-1}$. ……… 2 分

由$a_2+b_2=4$得$d+2q=3$，由$a_3+b_3=13$得$d+q^2=6$，

联立$\begin{cases}d+2q=3,\\ d+q^2=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=-3,\\ q=3,\end{cases}$ ……………………………… 4 分

所以$a_n=-3n+4$，$b_n=2\times3^{n-1}$ ……………………………… 6 分

(2) 设$\{a_n\}$的公差为$d$，$\{b_n\}$的公比为$q$，

由$b_1=2$，$S_3=14$，得$q^2+q-6=0$，解得$q=2$，或$q=-3$， ……………… 8 分

当$q=2$时，由$a_2+b_2=4$，得$d+2q=3$，所以$d=-1$，故$T_4=4a_1+6d=-2$， …… 10 分

当$q=-3$时，由$a_2+b_2=4$，得$d+2q=3$，所以$d=9$，故$T_4=4a_1+6d=58$. …… 12 分

18. 解：(1) 根据学习成绩增长率频数分布表得，所调查的 100 名学生中，学习成绩增长率不低于 40% 的学生频率为$\frac{10+8}{100}=0.18$， ……………………………… 2 分

用样本频率分布估计总体分布可以得到这个学校高一学生成绩增长率不低于 40% 的学生比例为 18%. ……………………………… 4 分

(2) $\bar{x}=\frac{1}{100}(0.05\times16+0.15\times24+0.25\times30+0.35\times12+0.45\times10+0.55\times8)=0.25$

……………………………… 7 分

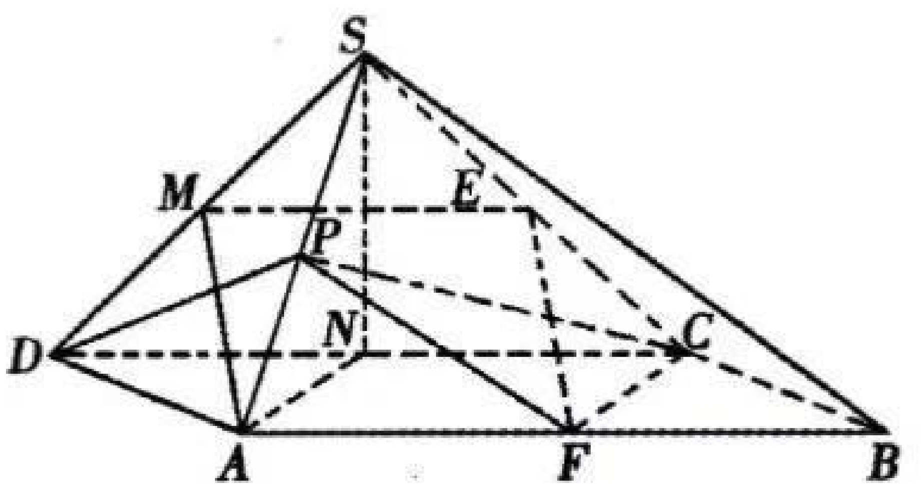
$s^2=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{6}=n_i(x_i-\bar{x})^2$

$=\frac{1}{100}[(-0.2)^2\times16+(-0.1)^2\times24+0\times30+0.1^2\times12+0.2^2\times10+0.3^2\times8]$

$=0.0212=0.0001\times212$， ……………………………… 10 分

$s=\sqrt{0.0212}=\sqrt{0.0001}\times\sqrt{212}=0.01\times14.56\approx0.146$. ……………… 12 分

19. 解：(1) 设$M$为$SD$的中点，连接$ME$，$MA$，




因为$ME$是$\triangle SDC$的中位线，所以$ME=\frac{1}{2}DC=AD=1$，

又因为$AD=BC$，且$AD/\!/BC$，所以底面$ABCD$为平行四边形.

所以$AF=\frac{1}{2}AB=1$，又$ME/\!/DC$，且$DC/\!/AB$，故$ME/\!/AB$，

且$ME=AF=1$，所以四边形$AFEM$是平行四边形.

……………………………… 2 分

所以 $AM // EF$，又 $AM \subset$ 平面 $SAD$，$EF \not\subset$ 平面 $SAD$，

所以 $EF //$ 平面 $SAD$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $SD = SC = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}$，又 $DC = 2$，

所以 $SD^2 + SC^2 = DC^2$，故 $SD \perp SC$. …………………………………………………… 6 分

设 $N$ 是 $DC$ 的中点，连接 $SN$，因为 $SD = SC$，

所以 $SN \perp DC$，$SN = 1$，又平面 $SDC \perp$ 底面 $ABCD$，$SN \subset$ 平面 $SDC$，所以 $SN \perp$ 平面 $ABCD$.

…………………………………………………………………………………………… 8 分

连接 $NA$，在 $\triangle ADN$ 中，$\angle ADN = 60°$，$DN = DA = 1$，所以 $AN = 1$

在边长为 1 的等边三角形 $DAN$ 中，点 $A$ 到边 $DN$ 的距离 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………… 9 分

在 $Rt\triangle SNA$ 中，$SA = \sqrt{AN^2 + NS^2} = \sqrt{2}$.

在 $\triangle SDA$ 中，$SD = SA = \sqrt{2}$，$PD = DA = 1$，由余弦定理得 $\cos\angle DAS = \frac{AD^2 + AS^2 - DS^2}{2DA \cdot AS} =$

$\frac{AD^2 + AP^2 - DP^2}{2DA \cdot AP}$，

即 $\frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} = \frac{1^2 + AP^2 - 1^2}{2 \cdot AP}$，解得 $AP = \frac{\sqrt{2}}{2}$，故点 $P$ 为棱 $SA$ 的中点， …… 10 分

所以点 $P$ 到底面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{SN}{2} = \frac{1}{2}$.

所以 $V_{P-AFCD} = \frac{1}{3}S_{四边形AFCD} \cdot \frac{SN}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(AF + CD)h}{2} \cdot \frac{SN}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. …………………… 12 分

20. 解：(1)当 $a = \frac{1}{2}$ 时，$f(x) = e^x(\frac{1}{2}e^x + 1 - x) + \frac{1}{2}$，$f'(x) = e^x(e^x - x)$. 故 $g(x) = e^x - x$，…

…………………………………………………………………………………………… 3 分

所以 $g'(x) = e^x - 1$，当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，$g'(x) < 0$；当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$g'(x) > 0$，

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$，单调递增区间为 $(0, +\infty)$. ……………… 6 分

(2) $f'(x) = e^x(2ae^x - x)$，依据题意可知 $f'(x) = 0$ 有两个不等实数根，

即 $2ae^x - x = 0$ 有两个不等实数根 $x_1, x_2$. ………………………………………… 7 分

由 $2ae^x - x = 0$，得 $a = \frac{x}{2e^x}$，

所以 $2ae^x - x = 0$ 有两个不等实数根可转化为函数 $y = a$ 和 $y = \frac{x}{2e^x}$ 的图象有两个不同的交点.

令 $h(x) = \frac{x}{2e^x}$，则 $h'(x) = \frac{1-x}{2e^x}$，

因为 $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增，在 $(1, +\infty)$ 单调递减，所以 $h(x) \leqslant h(1) = \frac{1}{2e}$. ……

…………………………………………………………………………………………… 10 分

又当 $x \to +\infty$ 时，$h(x) \to 0$，当 $x \to -\infty$ 时，$h(x) \to -\infty$，

因为 $y = a$ 与 $y = h(x)$ 的图象两个不同的交点，所以 $a \in (0, \frac{1}{2e})$. …………………… 12 分

21. 解：(1)直线 $MQ$ 的方程为 $y = \frac{t}{2}(x + 2)$，直线 $PR$ 的方程为 $y = -\frac{1}{t}(x - 2)$， …… 2 分

两式相乘，得 $y^2=-\frac{1}{2}(x^2-4)$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

因为 $t\neq0$，所以 $y\neq0$，故点 $R$ 的轨迹 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1(y\neq0)$. ……………… 4 分

(2) 设直线 $AB$ 的方程为 $x=my+1$. 点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 $x$ 并整理，得 $(m^2+2)y^2+2my-3=0$，则 $\Delta=16m^2+24>0$，

$y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+2}$，……………………………………………… 6 分

所以 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{4m^2+6}}{m^2+2}$，

$\triangle MAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\times|MD|=\frac{3\sqrt{4m^2+6}}{m^2+2}=\frac{12\sqrt{4m^2+6}}{4m^2+8}=\frac{12}{\sqrt{4m^2+6}+\frac{2}{\sqrt{4m^2+6}}}$，……………………………………………… 8 分

设 $t=\sqrt{4m^2+6}$，则 $t\geqslant\sqrt{6}$，设 $f(t)=t+\frac{2}{t}(t\geqslant\sqrt{6})$，

则 $f'(t)=1-\frac{2}{t^2}>0$，$f(t)$ 在 $[\sqrt{6},+\infty)$ 是增函数，……………………………… 10 分

故 $f(t)\geqslant f(\sqrt{6})=\sqrt{6}+\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{8}{\sqrt{6}}$，即 $\sqrt{4m^2+6}+\frac{2}{\sqrt{4m^2+6}}\geqslant\frac{8}{\sqrt{6}}$，有 $S\leqslant\frac{12}{\frac{8}{\sqrt{6}}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，

因此，当 $t=\sqrt{6}$，即 $m=0$ 时，$S$ 存在最大值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. ………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由 $C$ 的参数方程消去参数 $t$，得 $C$ 的普通方程为 $y^2=4x$. ……………………… 3 分

(2) 根据(1)，设 $P(x,y)$，$A(4t_1^2,4t_1)$，$B(4t_2^2,4t_2)$，$(t_1\neq t_2$，且 $t_1t_2\neq0)$，

则 $k_{OA}=\frac{4t_1}{4t_1^2}=\frac{1}{t_1}$，$k_{OB}=\frac{4t_2}{4t_2^2}=\frac{1}{t_2}$，因为 $OA\perp OB$，所以 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$，得 $t_1t_2=-1$，…………………………………………………………………………………… 5 分

又 $k_{OP}=\frac{y}{x}$，$k_{AB}=\frac{1}{t_2+t_1}$，因为 $OP\perp AB$，所以 $k_{OP}\cdot k_{AB}=-1$，即 $t_1+t_2=-\frac{y}{x}(x\neq0)$，…………………………………………………………………………………… 7 分

因为 $A,P,B$ 三点共线，所以 $k_{AP}=k_{PB}$，

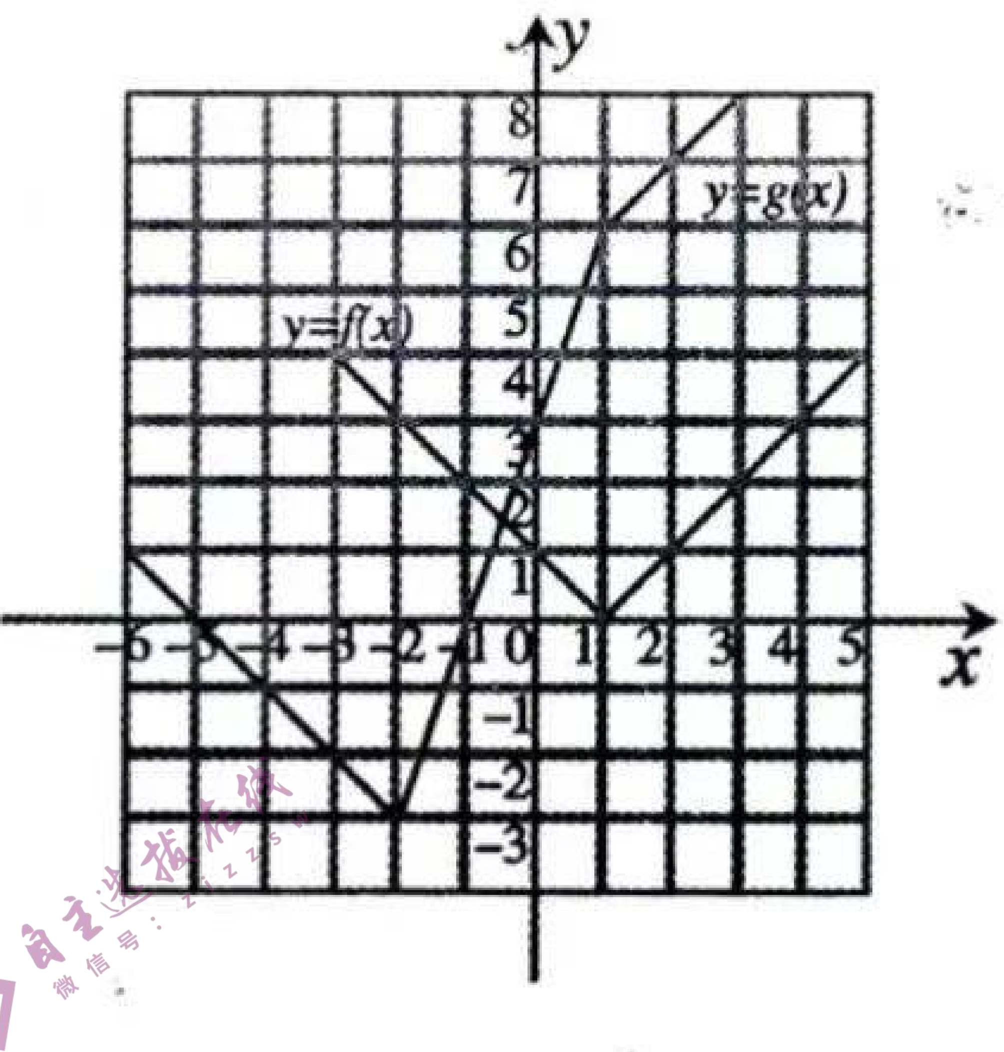
即 $\frac{4t_1-y}{4t_1^2-x}=\frac{4t_2-y}{4t_2^2-x}$，整理得 $x-(t_1+t_2)y+4t_1t_2=0$，

把 $t_1+t_2=-\frac{y}{x}$ 和 $t_1t_2=-1$，代入上式，得 $x^2+y^2-4x=0\ (x\neq0)$，

故点 $P$ 轨迹的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta\ (\rho\neq0)$. ……………………………………… 10 分

23. 解：由已知得 $g(x)=\begin{cases}-x-5, x<-2,\\ 3x+3, -2\leqslant x\leqslant1,\\ x+5, x>1.\end{cases}$ ……………………………………… 3 分

$y=f(x)$和$y=g(x)$的图象如图所示. ………………………………………………… 5分




(2)$y=f(x+a)$的图象是由函数$y=f(x)$的图象向左平移$a(a>0)$个单位长度,或向右平移$|a|$ $(a<0)$个单位长度得到的,根据图象与$f(x+a)\geqslant g(x)$,
可知把函数$y=f(x)$的图象向右平移不符合题意,只能向左平移. ………………………… 7分
当向左平移使$y=f(x+a)$的图象的右支经过$y=g(x)$的图象上的点$(1,6)$时为临界状态,
如图所示,此时$y=f(x+a)$的图象的右支对应的函数解析式为$y=x+a-1(x\geqslant 1-a)$,$y=f(x+a)$的图象的左支与$y=g(x)$的图象的一部分重合,
代入点$(1,6)$的坐标,则$6=1+a-1$,解得$a=6$.
因为$f(x+a)\geqslant g(x)$,所以$a=6$,故$a$的值为6
………………………………………… 10分