绝密★启用前

2022—2023 学年高三一轮复习验收考试

数学文科

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<2x+1<4\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{x\mid -1<x<2\}$

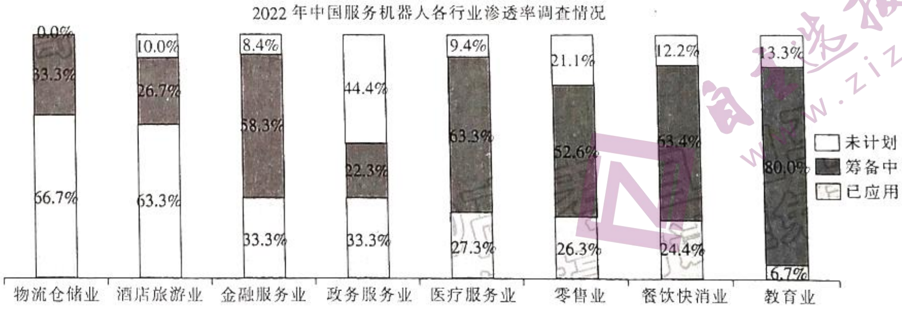
2. 已知 i 是虚数单位，复数 $z=\dfrac{1+i}{2-i}$，则 $z-2\bar{z}=$

A. $\dfrac{9}{5}-\dfrac{3}{5}i$　　B. $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{9}{5}i$

C. $\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}i$　　D. $-\dfrac{1}{5}+\dfrac{9}{5}i$

3. 随着工业自动化和计算机技术的发展，中国机器人进入大量生产和实际应用阶段，下图为 2022 年中国服务机器人各行业渗透率调查情况.

2022 年中国服务机器人各行业渗透率调查情况



根据该图，下列结论错误的是

A. 物流仓储业是目前服务行业中服务机器人已应用占比最高的行业

B. 教育业目前在大力筹备应用服务机器人

C. 未计划使用服务机器人占比最高的是政务服务业

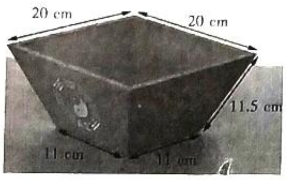
D. 图中八大服务业中服务机器人已应用占比的中位数是 33.3%

4. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{y^2}{a}=1(a>0)$，下列结论正确的是

A. C 的实轴长为 $\sqrt{2a}$　　B. C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$

C. C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. C 的一个焦点的坐标为 $(\sqrt{5a},0)$

5. 中国某些地方举行婚礼时要在吉利方位放一张桌子，桌子上放一个装满粮食的升斗，斗面用红纸糊住，斗内再插一杆秤、一把尺子，寓意为粮食满园、称心如意、十全十美. 下图为一种婚庆升斗的规格，把该升斗看作一个正四棱台，忽略其壁厚，则该升斗的容积约为（参考数据：$\sqrt{91.75}\approx 9.6$，1 L = 1 000 cm^3，参考公式：$V_{棱台}=\frac{1}{3}(S_上+S_下+\sqrt{S_上\cdot S_下})\cdot h$）



A. 1.5 L　　B. 2.4 L　　C. 5.0 L　　D. 7.1 L

6. 函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的一个单调递减区间为

A. $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$　　B. $\left[-\frac{11\pi}{12},-\frac{5\pi}{12}\right]$　　C. $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$

7. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y-2\leqslant 0,\\ x-2y-2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $y-3x$ 的最小值是

A. $-\frac{8}{3}$　　B. -2　　C. -1　　D. 1

8. 若 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，则 $|\cos\alpha|+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos 2\alpha}=$

A. 0　　B. $2\cos\alpha$

C. $\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

9. 已知 $a=\frac{5}{2}$，$b=\log_2 6$，$c=\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$，则

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$

C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

10. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则 $k=$

A. 1　　B. ± 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\pm\sqrt{2}$

11. 已知圆柱 O_1O_2 的轴截面是边长为 4 的正方形，底面圆 O_2 的圆周在球 O 的表面上，底面圆 O_1 所在平面被球 O 截得的是半径为 $2\sqrt{3}$ 的圆面，若点 O 在圆柱 O_1O_2 内，则球 O 的表面积与圆柱 O_1O_2 的表面积之比为

A. 2　　B. $\frac{13}{5}$　　C. $\frac{13}{6}$　　D. $\frac{13}{24}$

12. 已知函数 $f(x)=x^2+a\ln x$ 有两条与直线 $y=2x$ 平行的切线，且切点坐标分别为 $P(x_1,f(x_1))$，$Q(x_2,f(x_2))$，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的取值范围是

A. $(0,2\sqrt{2})$　　B. $(0,4)$　　C. $(2\sqrt{2},+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 经过点 $A(-1,0)$，$B(1,2)$，且面积最小的圆的标准方程为________.

14. 若函数 $f(x)=\log_2(16^x+1)-ax$ 是偶函数，则 $\log_a 2=$________.

15. 已知在△ABC 中，$A=\frac{\pi}{4}$，$C=\frac{\pi}{8}$，$BC=3$，则△ABC 的面积为________.

16. 圆锥曲线C的弦AB与过弦的端点A,B的两条切线的交点P所围成的三角形PAB叫做阿基米德三角形，若曲线C的方程为$x^2=4y$，弦AB过C的焦点F，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则有$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{x_1x_2}{4}$，对于C的阿基米德三角形PAB给出下列结论：①点P在直线$y=-1$上；②$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$；③$k_{PF}+k_{AB}=0$；④$|PF|^2=|FA|\cdot|FB|$，其中所有正确结论的序号为______.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.（12分）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_4=5a_3$，$a_2=2a_3+1$.

（1）求a_n与S_n；

（2）在下列两个条件中选一个，求数列$\{b_n\}$的前30项和.

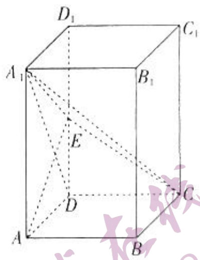
①$b_n=\frac{1}{a_{n+5}a_{n+6}}$；②$b_n=|a_n|$.

注：如选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（12分）如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，点E在棱DD_1上，且$AE\perp A_1D$.

（1）证明：$AE\perp A_1C$；

（2）求三棱锥$E-A_1CD$的体积.



19.（12分）数据显示中国车载音乐已步入快速发展期，随着车载音乐的商业化模式进一步完善，市场将持续扩大，下表为2018—2022年中国车载音乐市场规模（单位：十亿元），其中年份2018—2022对应的代码分别为1—5.

年份代码x	1	2	3	4	5
车载音乐市场规模y	2.8	3.9	7.3	12.0	17.0

（1）由上表数据知，可用指数函数模型$y=a\cdot b^x$拟合y与x的关系，请建立y关于x的回归方程（a,b的值精确到0.1）；

（2）综合考虑2023年及2024年的经济环境及疫情等因素，某预测公司根据上述数据求得y关于x的回归方程后，通过修正，把$b-1.3$作为2023年与2024年这两年的年平均增长率，请根据2022年中国车载音乐市场规模及修正后的年平均增长率预测2024年的中国车载音乐市场规模.

参考数据：

$\bar{v}$	$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iv_i$	$e^{0.524}$	$e^{0.472}$
1.94	33.82	1.7	1.6

其中$v_i=\ln y_i$，$\bar{v}=\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}v_i$.

参考公式：对于一组数据(u_1,v_1)，(u_2,v_2)，…，(u_n,v_n)，其回归直线$\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为$\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

20. (12 分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过 $A_1\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right),A_2\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right),A_3\left(\frac{3}{2},0\right),A_4(0,1)$中的 3 个点.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)直线 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A,B 两点,直线 $y=k(x-2)-1$ 与 C 交于 M,N(点 M 在点 N 下方)两点.过点 M 与 x 轴垂直的直线与直线 AB 交于点 P,与直线 AN 交于点 Q,证明:点 P 为线段 MQ 的中点.

21. (12 分)已知函数 $f(x)=\ln x-ax+(2-2a)\sqrt{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $a=1,\frac{1}{e}<t<e$,且存在 $x_1\in\left(\frac{1}{e},t\right],x_2\in[t,e)$,使得 $f(x_1)+f(x_2)>\ln t-3$,求实数 t 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (10 分)【选修 4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程是$\begin{cases}x=2t-1,\\y=t^2+1\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=1$.

(1)求曲线 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程;

(2)若把直线 l 向上平移 $a(a>0)$个单位长度后与曲线 C 有公共点,求实数 a 的取值范围.

23. (10 分)【选修 4-5:不等式选讲】

已知 $f(x)=x^2-|x-3|$.

(1)求不等式 $f(x)<|x|$ 的解集;

(2)若 $a,b\in(1,+\infty)$,且对任意实数 x,恒有 $f(x)\geq a+b-ab$,证明:$a+b\geq2+\sqrt{17}$.

2022—2023 学年高三一轮复习验收考试

数学文科参考答案

1.【答案】B

【解析】因为 $A=\{x\mid -1<2x+1<4\}=\{x\mid -1<x<\frac{3}{2}\}$，$B=\{-1,0,1\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$，故选 B.

2.【答案】D

【解析】因为 $z=\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{1+3i}{5}$，所以 $z-2\bar{z}=\frac{1+3i-2(1-3i)}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{9}{5}i$，故选 D.

3.【答案】D

【解析】由图可得 ABC 均正确，图中八大服务业中服务机器人已应用占比的中位数是 $\frac{33.3\%+27.3\%}{2}=30.3\%$，D 错误，故选 D.

4.【答案】C

【解析】C 的实轴长为 $2\sqrt{2a}$，A 错误；C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，B 错误；C 的离心率为 $\sqrt{1+\frac{a}{2a}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，C 正确；$C$ 的焦点为 $(\pm\sqrt{3a},0)$，D 错误，故选 C.

5.【答案】B

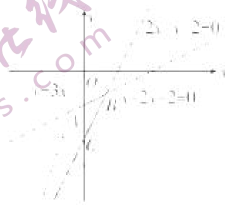
【解析】由题意可知，正四棱台的上底面面积 $S_1=400\ cm^2$，下底面面积 $S_2=121\ cm^2$，高 $h=\sqrt{11.5^2-\left(\frac{20\sqrt{2}-11\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{91.75}\approx 9.6\ cm$，所以该升斗的容积 $V=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})h=\frac{400+121+20\times 11}{3}\times 9.6=2\ 371.2\ cm^3$，即该升斗的容积约为 2.4 L，故选 B.

6.【答案】B

【解析】由 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，取 $k=-1$，得 $f(x)$ 的一个单调递减区间为 $\left[-\frac{11\pi}{12},-\frac{5\pi}{12}\right]$，故选 B.

7.【答案】A

【解析】如图所示，不等式组 $\begin{cases}2x-y-2\leqslant 0,\\ x-2y-2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 表示的可行域是以 $A(0,-1)$，$B\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$C(0,-2)$ 为顶点的三角形区域，设 $y-3x=z$，则 $y=3x+z$，作初始直线 $y=3x$，该直线平移至经过点 B 时 z 取得最小值 $-\frac{8}{3}$，故选 A.



8.【答案】D

【解析】因为 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，所以 $|\cos\alpha|+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos 2\alpha}=|\cos\alpha|+|\sin\alpha|=\cos\alpha-\sin\alpha=$

$\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，故选 D.

9.【答案】D

【解析】因为 $b=\log_2 6=1+\log_2\sqrt{9}>1+\log_2\sqrt{8}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，$c=\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}<\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$，所以 $c<a<b$，故选 D.

10.【答案】B

【解析】由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 两边平方得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，设 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=r(r>0)$，则 $|\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+k^2\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+k^2}\,r$，因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}|}=\frac{r^2}{r^2\cdot\sqrt{1+k^2}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $k^2=1$，$k=\pm1$，故选 B.

11.【答案】C

【解析】设球 O 的半径为 R，则 $\sqrt{R^2-2^2}+\sqrt{R^2-(2\sqrt{3})^2}=4$，解得 $R=\sqrt{13}$，则球 O 的表面积与圆柱 O_1O_2 的表面积之比为 $\frac{4\pi\times(\sqrt{13})^2}{2\pi\times2\times4+2\pi\times2^2}=\frac{13}{6}$，故选 C.

12.【答案】D

【解析】因为 $f(x)=x^2+a\ln x$，所以 $f'(x)=2x+\frac{a}{x}$，由题意可得 $f'(x)=2$ 有两个不相等的正实根 x_1,x_2，所以 $a=2x-2x^2=2x(1-x)$ 有两个不相等的正实根 x_1,x_2，所以 $0<a<\frac{1}{2}$，因为 $a=2x-2x^2$ 可化为 $2x^2-2x+a=0$，所以 $x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\frac{a}{2}$，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{a}>4$，故选 D.

13.【答案】$x^2+(y-1)^2=2$（不写成标准方程不给分）

【解析】经过点 $A(-1,0)$，$B(1,2)$，且面积最小的圆就是以线段 AB 为直径的圆，圆心为线段 AB 的中点 $(0,1)$，半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{2}$，所以该圆的标准方程为 $x^2+(y-1)^2=2$.

14.【答案】1（不把结果化成最简（若写成 $\log_2 2$）不给分）

【解析】因为 $f(x)=\log_2(16^x+1)-ax$ 是偶函数，所以 $f(x)-f(-x)=\log_2\frac{16^x+1}{16^{-x}+1}-2ax=\log_2 16^x-2ax=4x-2ax=0$，所以 $a=2$，$\log_2 2=1$.

15.【答案】$\frac{9}{4}$（不把结果化成最简不给分，写成 9/4 不给分）

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由 $A=\frac{\pi}{4}$，$C=\frac{\pi}{8}$，得 $B=\frac{5\pi}{8}$，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，所以 $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=\frac{BC^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{9\sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{9\sin\frac{\pi}{4}}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{9}{4}$.

16.【答案】①④（结果少填、多填、错填都不给分）

【解析】设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，与 $x^2=4y$ 联立得 $x^2-4kx-4=0$，所以 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，所以 $y_0=\frac{x_1x_2}{4}=-1$，①正确；因为 $y=\frac{x^2}{4}$，所以 $y'=\frac{x}{2}$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{x_1x_2}{4}=-1$，②错误；$k_{PA}+k_{PB}=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，③错误；由②知 $PA\perp PB$，由 $P(2k,-1)$，$F(0,1)$ 可得 $k_{PF}=\frac{2}{-2k}=-\frac{1}{k}$，所以 $PF\perp AB$，所以 $|PF|^2=|FA||FB|$，④正确，故正确结论的序号为①④.

数学文科 第2页（共6页）

17. 解：(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $S_5=5a_3$ 得 $4a_1+6d=5(a_1+2d)$，

整理得 $d=-\frac{1}{4}a_1$.（1 分）

由 $a_2=2a_5+1$ 得 $a_1+d=2(a_1+4d)+1$，即 $a_1+7d+1=0$.（2 分）

由 $\begin{cases} d=-\frac{1}{4}a_1, \\ a_1+3d+1=0 \end{cases}$ 得 $a_1=-4, d=1$.（3 分）

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-4+n-1=n-5$.（5 分）

$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(-4+n-5)n}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{9}{2}n$.（7 分）

(2) 选 1：由 (1) 得 $a_n=n-5$，

所以 $b_n=\frac{1}{a_{n+5}a_{n+6}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.（9 分）

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 30 项和为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{30}-\frac{1}{31}=1-\frac{1}{31}=\frac{30}{31}$.（12 分）

选 2：由 (1) 得 $a_n=n-5$，当 $n\le4$ 时 $a_n<0$，当 $n\ge5$ 时 $a_n\ge0$.（9 分）

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 30 项和为 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{30}|$

$=-(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+\cdots+a_{30})$

$=S_{30}-2S_4=\frac{1}{2}\times30^2-\frac{9}{2}\times30-2\times\left(\frac{1}{2}\times4^2-\frac{9}{2}\times4\right)=335$.（12 分）

【评分细则】

第 (2) 小题若把求前 30 项误认为求前 n 项和酌情扣分.

18. (1) 证明：在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CD\perp$ 平面 ADD_1A_1，

$AE\subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $CD\perp AE$.（2 分）

因为 $AE\perp A_1D$，且 $A_1D\cap CD=D$，

所以 $AE\perp$ 平面 A_1CD.（4 分）

因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1CD，

所以 $AE\perp A_1C$.（6 分）

(2) 解：因为 $AE\perp A_1D$，

所以 $\angle EAD+\angle A_1DA=\frac{\pi}{2}$.

因为 $\angle DA_1A+\angle A_1DA=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\angle DA_1A=\angle EAD$.

因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，

所以 $\tan\angle DA_1A=\frac{AD}{AA_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\tan\angle EAD=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$DE=\frac{\sqrt{2}}{2}$.（9 分）

所以 $V_{三棱锥E-ACD}=V_{三棱锥C-ADE}=\frac{1}{3}\times AD\times\frac{1}{2}\times DE\times CD$

$=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{12}$.（12 分）

【评分细则】

(1)第(1)小题不写"因为 $A_1D\cap CD=D$,所以 $AE\perp$ 平面 A_1CD",扣1分.

(2)第(2)小题直接得出点 E 为 DD_1 中点,没有推理过程,扣2分,后续计算正确,步骤分给满分.

19. 解:(1)$y=a\cdot b^x$ 两边同时取自然对数得 $\ln y=\ln(a\cdot b^x)=\ln a+x\ln b$.

设 $\ln y=v$,所以 $v=\ln a+x\ln b$.(2分)

因为 $\bar{x}=3$,$\bar{v}=1.94$,$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$,

所以 $\ln\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iv_i-5\bar{x}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{33.82-5\times3\times1.94}{55-5\times3^2}=0.472$.(4分)

把(3,1.94)代入 $v=\ln\hat{a}+x\ln\hat{b}$,得 $\ln\hat{a}=0.524$,(6分)

所以 $\hat{v}=0.524+0.472x$,即 $\ln\hat{y}=0.524+0.472x$,(7分)

所以 $\hat{y}=e^{0.524+0.472x}=1.7\times1.6^x$,

即 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=1.7\times1.6^x$.(9分)

(2)由(1)知 $\hat{b}-1.3=0.3$,(10分)

所以根据2022年中国车载音乐市场规模及修正后的年平均增长率预测2024年中国车载音乐市场规模为 $17.0\times1.3^2=17.0\times1.69=28.73$ 十亿元.(12分)

【评分细则】

所得数据非常接近可酌情给分.

20. (1)解:因为点 A_1,A_2 关于原点对称,由椭圆的对称性可知 A_1,A_2 要么都在 C 上,要么都不在 C 上,

因为椭圆 C 经过 A_1,A_2,A_3,A_4 中的3个点,

所以 A_1,A_2 都在 C 上,$\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1$,(2分)

因为 $A_1\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 在 C 上,$\sqrt{3}>\dfrac{3}{2}$,所以 $A_3\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ 不在 C 上,故 $A_4(0,1)$ 在 C 上,

所以 $b=1$,代入 $\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1$,得 $a=2$,

所以 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.(4分)

(2)证明:由题意知 $A(2,0)$,$B(0,-1)$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$y_2>y_1$,

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x-2)-1\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-8k(2k+1)x+16k^2+16k=0$,

由 $\Delta=-64k>0$ 得 $k<0$,

$x_1+x_2=\dfrac{16k^2+8k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}$,(6分)

直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{2}-y=1$,

直线 AN 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,

所以 $P\left(x_1,\dfrac{x_1-2}{2}\right)$,$Q\left(x_1,\dfrac{y_2}{x_2-2}(x_1-2)\right)$,(8分)

所以 $y_M+y_Q-2y_P$

$=y_1+\dfrac{y_2}{x_2-2}(x_1-2)-(x_1-2)$

$=k(x_1-2)-1+\dfrac{k(x_2-2)-1}{x_2-2}(x_1-2)-(x_1-2)$

$=\dfrac{(2k-1)(x_1-2)(x_2-2)-(x_1+x_2-4)}{x_2-2}$

$=\dfrac{(2k-1)[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]-(x_1+x_2-4)}{x_2-2}$

$=\dfrac{(2k-1)\left(\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}-\dfrac{32k^2+16k}{1+4k^2}+4\right)-\left(\dfrac{16k^2+8k}{1+4k^2}-4\right)}{x_2-2}=0$.（10 分）

所以 $y_M+y_Q=2y_P$.

因为 M,P,Q 共线，所以点 P 是线段 MQ 的中点.（12 分）

【评分细则】

(1) 第(1)小题直接写出 $\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ 在 $(1,1)$，$(0,1)$ 在 C 上，没有推理过程，扣 1 分.

(2) 第(2)小题使用其他方法证明的情给分，结果步骤均正确，可给满分.

21. 解：(1) 因为 $f(x)=\ln x-ax+(2-2a)\sqrt{x}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a+\dfrac{1-a}{\sqrt{x}}=\dfrac{-ax+(1-a)\sqrt{x}+1}{x}=-\dfrac{(\sqrt{x}+1)(a\sqrt{x}-1)}{x}$.（2 分）

因为 $x>0$，$\sqrt{x}+1>0$，

所以当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.（3 分）

当 $a>0$ 时，$x\in\left(0,\frac{1}{a^2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in\left(\frac{1}{a^2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，

此时 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a^2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a^2},+\infty\right)$ 上单调递减.

综上可知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a^2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a^2},+\infty\right)$ 上单调递减.（5 分）

(2) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-x$，

由(1)知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递增，在 $(1,e)$ 上单调递减.（6 分）

若 $\frac{1}{e}<t<1$，则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},t\right)$ 上单调递增，在 $(t,1)$ 上单调递增，在 $(1,e)$ 上单调递减.

所以 $f(x_1)\leqslant f(t)=\ln t-t$，$f(x_2)\leqslant f(1)=-1$，

$f(x_1)+f(x_2)\leqslant \ln t-t-1$.（8 分）

若 $t=1$，则 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant 2f(1)=-2=\ln t-t-1$.（9 分）

若 $1<t<e$，则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递增，在 $(1,t)$ 上单调递减，在 (t,e) 上单调递减.

所以 $f(x_1)\leqslant f(1)=-1$，$f(x_2)\leqslant f(t)=\ln t-t$，

$f(x_1)+f(x_2)\leqslant \ln t-t-1$.（10 分）

所以存在 $x_1\in\left(\frac{1}{e},t\right]$，$x_2\in[t,e)$，使得 $f(x_1)+f(x_2)>\ln t-3$ 只需要 $\ln t-t-1>\ln t-3$，

所以 $\frac{1}{e}<t<2$，即实数 t 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e},2\right)$.（12 分）

【评分细则】

(1) 第(1)小题单调区间是否包括端点都给分，若单调区间没有写成区间形式，酌情给分.

(2) 第(2)小题使用其他方法证明的酌情给分，结果步骤均正确，可给满分.

22. 解：(1) 由 $x=2t-1$ 得 $t=\frac{x+1}{2}$，

所以 $y=t^2+1=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$，

所以 C 的普通方程为 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$．（3 分）

由 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 得 l 的直角坐标方程为 $x-2y-1=0$．（5 分）

(2) 把直线 l 向上平移 $a(a>0)$ 个单位长度后所得直线的方程为 $x-2(y-a)-1=0$，

即 $x-2y+2a-1=0$，

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}, \\ x-2y+2a-1=0, \end{cases}$ 得 $x^2=4a-7$，（7 分）

所以 $a\geq\frac{7}{4}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{7}{4},+\infty\right)$．（10 分）

【评分细则】

(1) 第(1)小题 l 的方程写成 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$，不扣分．

(2) 第(2)小题 a 的取值范围不写成集合或区间形式不扣分．

23. (1) 解：原不等式等价于 $\begin{cases} x>3, \\ x^2-2x+3<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0\leq x\leq 3, \\ x^2-3<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0, \\ x^2+2x-3<0, \end{cases}$（2 分）

解得 $x\in\varnothing$ 或 $0\leq x<\sqrt{3}$ 或 $-3<x<0$，（4 分）

所以原不等式的解集为 $(-3,\sqrt{3})$．（5 分）

(2) 证明：当 $x\geq3$ 时，$f(x)=x^2-x+3\geq3^2-3+3=9$，

当 $x<3$ 时，$f(x)=x^2+x-3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\geq-\frac{13}{4}$，当且仅当 $x=-\frac{1}{2}$ 时取等号，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{13}{4}$，（7 分）

所以 $a+b-ab\leq-\frac{13}{4}$，$ab-a-b\geq\frac{13}{4}$，

即 $(a-1)(b-1)\geq\frac{17}{4}$，结合 $a,b\in(1,+\infty)$，可得 $a-1>0$，$b-1>0$，

所以 $a+b=(a-1)+(b-1)+2\geq2+2\sqrt{(a-1)(b-1)}\geq2+\sqrt{17}$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号．（10 分）

【评分细则】

(1) 第(1)小题不等式解集不写成集合或区间形式扣 1 分．

(2) 第(2)小题使用其他方法证明酌情给分，结果步骤均正确，可给满分．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。