2022年1月浙江省普通高中学业水平考试

数学试题

一、选择题（本大题共18小题，每小题3分，共54分，每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，不选、多选、错选均不得分）

1. 已知集合 $P=\{0,1,2\}$，$Q=\{1,2,3\}$，则 $P\cap Q=$（　　）

A. $\{0\}$　　B. $\{0,3\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题设，结合集合交集的概念，可得答案.

【详解】∵ $P=\{0,1,2\}$，$Q=\{1,2,3\}$

$\therefore P\cap Q=\{1,2\}$；

故选：C.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域是

A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|x>2\}$　　C. R　　D. $\{x|x\neq 2\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由 $x-2\neq 0$，即可得出定义域.

【详解】$\because x-2\neq 0$

$\therefore x\neq 2$

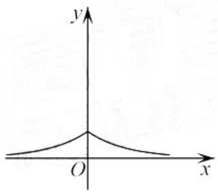
即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 2\}$

故选：D

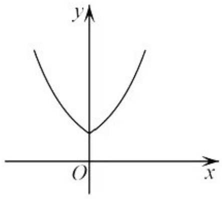
【点睛】本题主要考查了求具体函数的定义域，属于基础题.

3．函数 $y=2^{-x}$ 的图象大致是（　　）

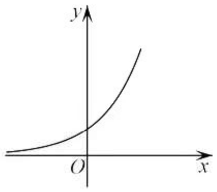
A.



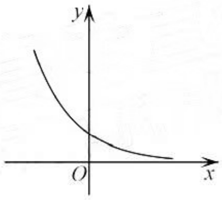
B.



C.



D.



【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的解析式可得函数 $y=2^{-x}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为底数的指数函数，再根据指数函数的图像即可得出答案.

【详解】解：由 $y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，得函数 $y=2^{-x}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为底数的指数函数，

且函数为减函数，故D选项符合题意.

故选：D.

4．已知 $\alpha\in R$，则 cos（π-α）=（　　）

A. sinα　　B. -sinα　　C. cosα　　D. -cosα

【答案】D

【解析】

【分析】利用诱导公式可以直接求出结果.

【详解】因为 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，

故选：D.

5. 已知圆 M 的方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=4$，则圆心 M 的坐标是（　　）

A. （−1，2）　　B. （1，2）　　C. （1，−2）　　D. （−1，−2）

【答案】A

【解析】

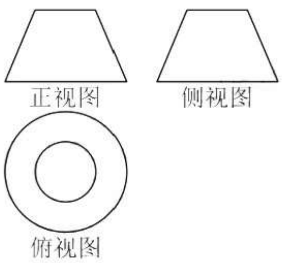
【分析】根据圆的标准式，即可得到圆心的坐标.

【详解】∵ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的圆心坐标为(a,b)；

∴ $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心坐标为$(-1,2)$；

故选：A.

6. 某几何体的三视图如图所示，则这个几何体可能是（　　）



A. 棱柱　　B. 圆柱　　C. 圆台　　D. 球

【答案】C

【解析】

【分析】根据几何体的特征可以直接求出结果.

【详解】由三视图知，从正面和侧面看都是梯形，

从上面看为圆形，下面看是圆形，并且可以想象到该几何体是圆台，

则该几何体可以是圆台.

故选：C.

7. 已知函数 $y=2ax^3$（$a>0$），则此函数是（　　）

A. 偶函数且在（-∞，+∞）上单调递减　　B. 偶函数且在（-∞，+∞）上单调递增

C. 奇函数且在（-∞，+∞）上单调递减　　D. 奇函数且在（-∞，+∞）上单调递增

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性的定义和幂函数的单调性可得选项.

【详解】解：令 $y=f(x)=2ax^3$，则函数 $y=f(x)=2ax^3$ 的定义域为 R，且 $f(-x)=2a(-x)^3=-2ax^3=-f(x)$，

所以函数 $y=f(x)=2ax^3$ 是奇函数，

又因为 $a>0$，所以函数 $y=f(x)=2ax^3$ 在（-∞，+∞）上单调递增，

故选：D.

8. 不等式 $x^2-4x<0$ 的解集是（　　）

A. $(0,4)$　　B. $(-4,0)$　　C. $(-\infty,4)$　　D. $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次不等式求解的方法计算求解.

【详解】$x^2-4x<0\Rightarrow x(x-4)<0$，解得 $0<x<4$，所以解集为 $(0,4)$.

故选：A

9. 设 A，B 是平面上距离为 4 的两个定点，若该平面上的动点 P 满足 $||PA|-|PB||=3$，则 P 点的轨迹是（　　）

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

【答案】C

【解析】

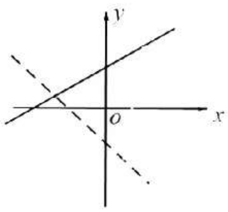
【分析】根据双曲线的定义即可得出答案.

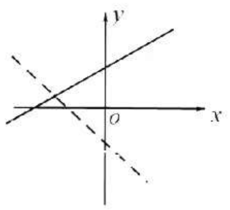
【详解】解：因为 $\left||PA|-|PB|\right|=3<4$，

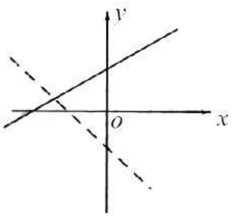
所以 P 点的轨迹是双曲线.

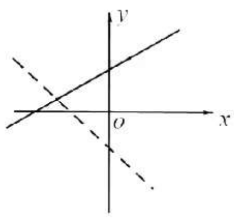
故选：C.

10. 不等式组 $\begin{cases}x-2y+5\geq 0\\ x+y+2<0\end{cases}$ 表示的平面区域是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】

【分析】画出直线 $x-2y+5=0$ 与 $x+y+2=0$，再代入 $(0,0)$ 点判断不等式是否成立，从而判断出 $x-2y+5\geq 0$ 与 $x+y+2<0$ 的平面区域.

【详解】画出直线 $x-2y+5=0$，经过一、二、三象限，对应图中的实线，代入 $(0,0)$ 可得 $5\geq 0$ 成立，所以 $x-2y+5\geq 0$ 表示的区域为直线 $x-2y+5=0$ 及直线右下方；画出直线 $x+y+2=0$，经过二、三、四象限，对应图中的虚线，代入 $(0,0)$ 可得 $2<0$ 不成立，所以 $x+y+2<0$ 表示的区域为直线 $x+y+2=0$ 及直线左下方，所以对应的平面区域为B.

故选：B

11. 已知空间中两条不重合的直线a,b，则“a与b没有公共点”是“$a//b$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】由直线a与b没有公共点表示两条直线$a//b$或者a与b是异面直线，再根据充分必要性判断.

【详解】“直线a与b没有公共点”表示两条直线$a//b$或者a与b是异面直线，所以“a与b没有公共点”是“$a//b$”的必要不充分条件.

故选：B

12. 为了得到函数$y=\cos\left(x-\frac{1}{3}\right)$的图象，可以将函数$y=\cos x$的图象（　　）

A. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度　　B. 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

C. 向左平移$\frac{1}{3}$个单位长度　　D. 向右平移$\frac{1}{3}$个单位长度

【答案】D

【解析】

【分析】函数$y=\cos x$中的x替换为$x-\frac{1}{3}$，可得到函数$y=\cos\left(x-\frac{1}{3}\right)$，根据“左加右减”平移法则可得到图象的平移变换方法.

【详解】函数$y=\cos x$中的x替换为$x-\frac{1}{3}$，可得到函数$y=\cos\left(x-\frac{1}{3}\right)$，

因此对应的图象向右平移移$\frac{1}{3}$个单位长度，可以将函数y=cosx的图象变为函数$y=\cos\left(x-\frac{1}{3}\right)$的图象，

故选：D

13. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+b$ 在区间（-∞，1]是减函数，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. [1，+∞）　　B. （-∞，1]　　C. [-1，+∞）　　D. （-∞，-1]

【答案】A

【解析】

【分析】由对称轴与 1 比大小，确定实数 a 的取值范围.

【详解】$f(x)=x^2-2ax+b$ 对称轴为 $x=a$，开口向上，要想在区间（-∞，1]是减函数，所以 $a\in[1,+\infty)$.

故选：A

14. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=6,|\vec{a}+\vec{b}|=8$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{10}$　　C. 8　　D. $4\sqrt{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用向量的数量积运算和模的运算法则可得 $|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}+\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$，由此根据已知条件可求得答案.

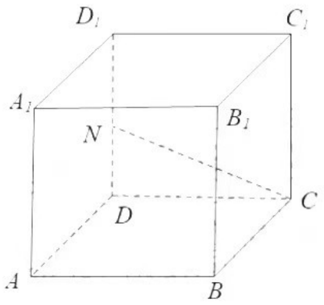
【详解】$\because |\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left(|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2\right)+\left(|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2\right)=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$，

又 $\because |\vec{a}|=4,|\vec{b}|=6,|\vec{a}+\vec{b}|=8$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2+64=2\times16+2\times36=104$，$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2=40$，$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{10}$，

故选：B.

15. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，N 是棱 DD_1 的中点，则直线 CN 与平面 DBB_1D_1 所成角的正弦值等于（　　）



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】通过连接 AC 、 BD 交于 O 的辅助线，确定 CN 与平面 DBB_1D_1 所成的角，再设正方体棱长为 2，根据 CN 与 CO 长度的关系，即可得出所求角的正弦值；

【详解】连接 AC 、 BD 交于 O,由正方形的性质可得 $CO\perp BD$，

又∵ $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，

$CO\subset$ 平面 $ABCD$， $\therefore BB_1\perp CO$，

又∵ BB_1 与 BD 在平面 DBB_1D_1 内相交，

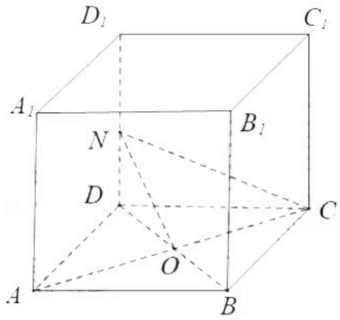
所以 $CO\perp$ 平面 DBB_1D_1

$\therefore\angle CNO$ 是 CN 与平面 DBB_1D_1 所成的角，

设正方体的棱长为 2，则 $CN=\sqrt{5}$， $CO=\sqrt{2}$，

$\therefore\sin\angle CNO=\frac{CO}{CN}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

故选：B.



16. 若 $\log_2(2^x-1)-x<\log_2(\lambda\cdot 2^x+3\lambda)$ 对任意 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，则 λ 的取值范围是（　　）

A. $(\frac{1}{9},+\infty)$　　B. $(0,\frac{1}{9})$　　C. $(\frac{1}{5},+\infty)$　　D. $(0,\frac{1}{5})$

【答案】A

【解析】

【分析】将不等式转化为 $\log_2\frac{2^x-1}{2^x}<\log_2(\lambda\cdot 2^x+3\lambda)$，根据 $y=\log_2 x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，可得 $\frac{2^x-1}{2^x}<(2^x+3)\lambda$，参变分离后令 $t=2^x(t>1)$，可转化为 $\frac{t-1}{t(t+3)}<\lambda$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上恒成立，利用基本不等式求解 $\frac{t-1}{t(t+3)}$ 的最大值，即可得 λ 的取值范围.

【详解】由 $\log_2(2^x-1)-x<\log_2(\lambda\cdot 2^x+3\lambda)$，可得 $\log_2(2^x-1)-\log_2 2^x<\log_2(\lambda\cdot 2^x+3\lambda)$，所以 $\log_2\frac{2^x-1}{2^x}<\log_2(\lambda\cdot 2^x+3\lambda)$，因为函数 $y=\log_2 x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $\frac{2^x-1}{2^x}<(2^x+3)\lambda\Rightarrow\frac{2^x-1}{2^x\cdot(2^x+3)}<\lambda$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，令 $t=2^x(t>1)$，则 $\frac{t-1}{t(t+3)}<\lambda$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上恒成立，令 $y=\frac{t-1}{t(t+3)}=\frac{1}{(t-1)+\frac{4}{t-1}+5}$，则 $y=\frac{1}{(t-1)+\frac{4}{t-1}+5}\le\frac{1}{2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{4}{t-1}}+5}=\frac{1}{9}$，当且仅当 $t=3$，即 $x=\log_2 3$ 时，取等号，所以 $\lambda>\frac{1}{9}$.

故选：A

17. 已知单位向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$不共线，且向量$\vec{a}$满足$|\vec{a}|=\frac{1}{4}$. 若$|\vec{a}-\lambda\overrightarrow{e_1}+(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}|\geq\frac{1}{4}$对任意实数$\lambda$都成立，则向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$夹角的最大值是（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】对$|\vec{a}-\lambda\overrightarrow{e_1}+(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}|\geq\frac{1}{4}$两边平方化简可得$\left|(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right|\geq\frac{1}{2}$，再平方化简整理得$(2-2\cos\theta)\lambda^2+(2\cos\theta-2)\lambda+\frac{3}{4}\geq0$恒成立，然后由$\Delta\leq0$可求出$\cos\theta$的范围，从而可求出$\theta$的最大值

【详解】设向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$夹角为$\theta$，设向量$\vec{a}$与$(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}$的夹角为$\alpha$，

$\left[(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right]^2=(\lambda-1)^2-2\lambda(\lambda-1)\cos\theta+\lambda^2=2\lambda^2-2\lambda+1-2\lambda(\lambda-1)\cos\theta$，

由$|\vec{a}-\lambda\overrightarrow{e_1}+(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}|\geq\frac{1}{4}$，得

$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\left[(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right]+\left[(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right]^2\geq\frac{1}{16}$，

所以$\frac{1}{2}\left|(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right|\cos\alpha+\left[(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right]^2\geq0$，

所以$\left|(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right|\geq-\frac{1}{2}\cos\alpha$，

所以$\left|(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right|\geq\left(-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)_{max}$

所以$\left|(\lambda-1)\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_1}\right|\geq\frac{1}{2}$，

所以$2\lambda^2-2\lambda+1-2\lambda(\lambda-1)\cos\theta\geq\frac{1}{4}$对任意实数$\lambda$都成立，

即$(2-2\cos\theta)\lambda^2+(2\cos\theta-2)\lambda+\frac{3}{4}\geq0$恒成立，

当$2-2\cos\theta=0$，即$\cos\theta=1$，得$\theta=0$，上式恒成立，

当$2-2\cos\theta>0$时，即$\cos\theta<1$，$\Delta=(2\cos\theta-2)^2-3(2-2\cos\theta)\le 0$，

$(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)\le 0$，

所以得$-\dfrac{1}{2}\le\cos\theta<1$，

因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$0<\theta\le\dfrac{2\pi}{3}$

综上，$0\le\theta\le\dfrac{2\pi}{3}$，

所以向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$夹角的最大值是$\dfrac{2\pi}{3}$，

故选：B

18. 通过以下操作得到一系列数列：第1次，在2，3之间插入2与3的积6，得到数列2，6，3；第2次，在2，6，3每两个相邻数之间插入它们的积，得到数列2，12，6，18，3；类似地，第3次操作后，得到数列：2，24，12，72，6，108，18，54，3.按上述这样操作11次后，得到的数列记为$\{a_n\}$，则a_{1025}的值是（　　）

A. 6　　　　B. 12　　　　C. 18　　　　D. 108

【答案】A

【解析】

【分析】设数列经过第n次拓展后的项数为b_n，因为数列每一次拓展是在原数列的相邻两项中增加一项，则经过第$n+1$次拓展后增加的项数为b_n-1，从而可得$b_{n+1}=b_n+b_n-1=2b_n-1$，从而可求出$b_n=2^n+1$，从而可知经过11次拓展后在2与6之间增加的数为$2^{10}-1$，由此可得出经过11次拓展后6所在的位置，即可得出答案.

【详解】解：设数列经过第n次拓展后的项数为b_n，因为数列每一次拓展是在原数列的相邻两项中增加一项，则经过第$n+1$次拓展后增加的项数为b_n-1，

所以$b_{n+1}=b_n+b_n-1=2b_n-1$，

即 $b_{n+1}-1=2\left(b_n-1\right)$，即 $\dfrac{b_{n+1}-1}{b_n-1}=2$，

所以数列 $\{b_n-1\}$ 是以 $b_1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列，

是以 $b_n-1=2^n$，所以 $b_n=2^n+1$，

则经过 11 次拓展后在 2 与 6 之间增加的数为 $2^{10}-1$，

所以经过 11 次拓展后 6 所在的位置为第 $2^{10}-1+1+1=2^{10}+1=1025$，

所以 $a_{1025}=6$.

故选：A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每空 3 分，共 15 分）

19. 若数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=2n$，记前 n 项和为 S_n，则 $a_2=$__________；$S_4=$__________.

【答案】 ①. 4 ②. 20

【解析】

【分析】根据数列的通项公式直接求出 a_2 即可，易得数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项 2 为公差的等差数列，再根据等差数列的前 n 项公式即可得出答案.

【详解】解：因为 $a_n=2n$，所以 $a_2=4$，

又 $a_{n+1}-a_n=2$，$a_1=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项 2 为公差的等差数列，

则 $S_4=\dfrac{4\left(a_1+a_4\right)}{2}=2\times\left(2+8\right)=20$.

故答案为：4；20.

20. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.若 a=2，A=45°，B=60°，则 b=__________.

【答案】$\sqrt{6}$

【解析】

分析】直接利用正弦定理即可得出答案.

【详解】解：因为 a=2，A=45°，B=60°，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

所以 $b=\dfrac{a\cdot\sin B}{\sin A}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$

故答案为：$\sqrt{6}$.

21. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2.已知点 $M(0,\dfrac{\sqrt{15}}{2}b)$，线段 MF_2 交椭圆于点 P，O 为坐标原点.若 $|PO|+|PF_1|=2a$，则该椭圆的离心率为__________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】由椭圆定义和题干中的 $|PO|+|PF_1|=2a$ 可得到 $|PF_2|=|PO|$，进而得出点 P 的坐标，代入椭圆方程化简可得到离心率.

【详解】根据椭圆定义知 $|PF_2|+|PF_1|=2a$，又 $\because |PO|+|PF_1|=2a$，$\therefore |PF_2|=|PO|$，

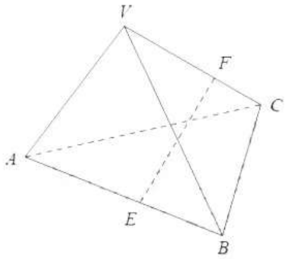
由三角形 MOF_2 为直角三角形可得点 P 是 MF_2 的中点，

$\because F_2(c,0),\therefore P(\dfrac{c}{2},\dfrac{\sqrt{15}b}{4})$，把点 P 代入椭圆方程中得 $\dfrac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\frac{\sqrt{15}b}{4}\right)^2}{b^2}=1\Rightarrow\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow e=\dfrac{1}{2}$.

故答案为：$\dfrac{1}{2}$.

22. 如图，E，F 分别是三棱锥 V-ABC 两条棱 AB，VC 上 动点，且满足 $\overline{EF}=2x\overline{AV}+y\overline{BC}(x>0,y>0)$

则 x^2+y^2 的最小值为__________.



【答案】$\frac{1}{5}$##0.2

【解析】

【分析】根据$\overrightarrow{EF}=2x\overrightarrow{AV}+y\overrightarrow{BC}(x>0,y>0)$可得$\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$共面，作$MF//AV$交$AC$于点$M$，连接$ME$，则$ME//BC$，再根据$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MF}$，可得$\frac{EM}{BC}=y,\frac{MF}{AV}=2x$，再利用相似比可得$CM=2xAC$，$AM=yAC$，从而可得$2x+y=1$，再利用二次函数的性质即可的解.

【详解】解：因为$\overrightarrow{EF}=2x\overrightarrow{AV}+y\overrightarrow{BC}(x>0,y>0)$，

所以$\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$共面，

作$MF//AV$交AC于点M，连接ME，则$ME//BC$，

因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MF}$，

所以$\overrightarrow{EM}=y\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MF}=2x\overrightarrow{AV}$，即$\frac{EM}{BC}=y,\frac{MF}{AV}=2x$，

因为$MF//AV$，所以$\frac{MF}{AV}=\frac{CM}{AC}=2x$，则$CM=2xAC$，

因为$ME//BC$，所以$\frac{EM}{BC}=\frac{AM}{AC}=y$，则$AM=yAC$，

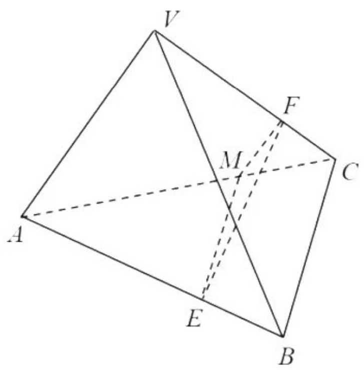
又$CM+AM=AC$，所以$2xAC+yAC=AC$，所以$2x+y=1$，

则 $y=1-2x$，$0<x<\frac{1}{2}$，

故 $x^2+y^2=x^2+(1-2x)^2=5x^2-4x+1=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$，

所以当 $x=\frac{2}{5}$ 时，x^2+y^2 取得最小值为 $\frac{1}{5}$.

故答案为：$\frac{1}{5}$.



三、解答题（本大题共 3 小题，共 31 分）

23. 已知函数 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6}),x\in R$.

（1）求 $f(0)$ 的值；

（2）求 $f(x)$ 的最小正周期.

【答案】（1）$\frac{3}{2}$

（2）π

【解析】

【分析】（1）根据函数的解析式和特殊角的三角函数值计算可得；

（2）根据函数的解析式得 $\omega=2$，利用周期公式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 计算可得.

【小问 1 详解】

$\because f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6}), x\in R$，

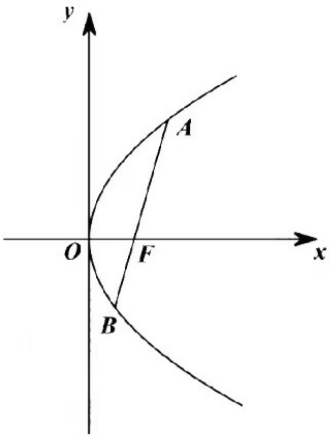
$\therefore f(0)=3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$

【小问 2 详解】

$\because f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6}), x\in R$，$\therefore \omega=2$，

$\therefore f(x)$ 最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$

24. 如图，已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到其准线的距离为 2.



（1）求 p 的值；

（2）设过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A、B 两点，O 为坐标原点，记△AOB 的面积为 S，当 $|FA||FB|=6S$ 时，求直线 l 的方程.

【答案】（1）2　　（2）$x-2\sqrt{2}y-1=0$ 或 $x+2\sqrt{2}y-1=0$

【解析】

【分析】（1）由抛物线的几何性质可得焦点到准线间的距离为 p，根据已知即可得到 p 的值；

（2）根据题意可设直线 l 的方程为 $x=my+1$，利用韦达定理可三角形面积公式得到 $S_{\triangle AOB}$ 关于 m 的表达式，利用抛物线的定义转化求得 $|FA||FB|$ 关于 m 的表达式，根据已知得到关于 m 的方程，求解后即得直线

l 的方程.

【小问 1 详解】

抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线为 $l:x=-\frac{p}{2}$，$\therefore$ 焦点到准线间的距离为 p，由已知得

抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到其准线的距离为 2，

$\therefore p=2$；

【小问 2 详解】

由（1）可得抛物线　方程为 $y^2=4x$，焦点 $F(1,0)$，

显然直线 l 的斜率不可能为零，故可设直线 l 的方程为 $x=my+1$，

代入抛物线方程整理得 $y^2-4my-4=0$，

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，

$S_{\square AOB}=\frac{1}{2}|OF||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(4m)^2-4\times(-4)}=2\sqrt{m^2+1}$，

$|FA||FB|=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=(x_1+1)(x_2+1)=(my_1+2)(my_2+2)$

$=m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4=-4m^2+8m^2+4=4m^2+4$，

由 $|FA||FB|=6S$，得 $4m^2+4=12\sqrt{m^2+1}$，解得 $m=\pm2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x-2\sqrt{2}y-1=0$ 或 $x+2\sqrt{2}y-1=0$.

25. 已知函数 $f(x)=|x-a|-\frac{1}{x}+a,a\in R$.

（1）若 f（1）=2，求 a 的值；

（2）若存在两个不相等的正实数 x_1,x_2，满足 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：

① $2<x_1+x_2<2a$；

② $\frac{x_2}{x_1} < a^2 + 1$.

【答案】（1）2；　　（2）证明过程见解析.

【解析】

【分析】（1）代入 f（1）=2 即可求出 a 的值；（2）①分情况讨论，得到 $x < a$ 时满足题意，根据函数单调性，不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2 < a$，构造差函数，证明极值点偏移问题；②在第一问的基础上进行放缩即可证明..

【小问 1 详解】

由 $f(1) = |1-a| - 1 + a = 2$，化简得：$|1-a| = 3-a$，两边平方，解得：$a = 2$.

【小问 2 详解】

不妨令 $x_1 < x_2$，

①当 $x > a$ 时，$f(x) = x - a - \frac{1}{x} + a = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故不能使得存在两个不相等的正实数 x_1, x_2，满足 $f(x_1) = f(x_2)$，舍去；

当 $x = a$ 时，$f(x) = a - \frac{1}{a}$ 为定值，不合题意；

当 $x < a$ 时，$f(x) = 2a - \left(x + \frac{1}{x}\right)$，由对勾函数知识可知：当 $a \le 1$ 时，$f(x) = 2a - \left(x + \frac{1}{x}\right)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，$f(x) = x - \frac{1}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，两个分段函数在 $x = a$ 处函数值相同，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不能使得存在两个不相等的正实数 x_1, x_2，满足 $f(x_1) = f(x_2)$，舍去；

当 $a > 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(a) = 2a - \left(a + \frac{1}{a}\right) = a - \frac{1}{a}$，即分段函数在 $x = a$ 处函数值相等，要想存在两个不相等的正实数 x_1, x_2，满足 $f(x_1) = f(x_2)$，则 x_1, x_2 有三种类型，第一种：$0 < x_1 < 1 < x_2 < a$，显然 $x_1 + x_2 < 2a$，令 $h(x) = f(x) - f(2-x)$，则 $h(1) = 0$，当 $x \in (0,1)$ 时，

$h'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2-x)^2}>-2+\frac{2}{x(2-x)}>-2+\frac{2}{\left(\frac{x+2-x}{2}\right)^2}=0$，即$h(x)$在

$x\in(0,1)$单调递增，所以$h(x)<h(1)=0$，即$f(x)<f(2-x)$，由于$x_1\in(0,1)$，所以$f(x_1)<f(2-x_1)$，

又因为$f(x_1)=f(x_2)$，所以$f(x_2)<f(2-x_1)$，因为$x_2>1,2-x_1>1$，而$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$x_2>2-x_1$，即$x_1+x_2>2$，综上：$2<x_1+x_2<2a$；第二种情况：$0<1<x_1<a<x_2$，显然满足

$x_1+x_2>2$，

接下来证明$x_1+x_2<2a$，令$g(x)=f(x)-f(2a-x)$，则$g(a)=0$，当$x\in(1,a)$时，

$g'(x)=f'(x)+f'(2a-x)=-1+\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}=\frac{2}{x^2}>0$，即$g(x)=f(x)-f(2a-x)$在$x\in(1,a)$单调

递增，所以$g(x)=f(x)-f(2a-x)<g(a)=0$，又$x_1\in(1,a)$，所以$f(x_1)<f(2a-x_1)$，又

$f(x_1)=f(x_2)$，所以$f(x_2)<f(2a-x_1)$，因为$x_2>a$，$2a-x_1>a$，$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增，所

以$x_2<2a-x_1$，即$x_1+x_2<2a$，综上：$2<x_1+x_2<2a$；第三种情况：$0<x_1<1<a<x_2$，由第一种情

况可知满足$x_1+x_2>2$，由第二种情况可知：$x_1+x_2<2a$，则$2<x_1+x_2<2a$，

综上：$2<x_1+x_2<2a$，证毕.

②由①可知：当$0<x_1<x_2<a$时，由$f(x_1)=f(x_2)$得：$2a-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)=2a-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)$，整理得：

$\frac{1+x_1^2}{x_1}=\frac{1+x_2^2}{x_2}$，即$\frac{x_2}{x_1}=\frac{1+x_2^2}{1+x_1^2}<\frac{1+a^2}{1+x_1^2}<1+a^2$；

当$0<x_1<a<x_2$时，$x_2-\frac{1}{x_2}=2a-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)$，整理得：$x_1+x_2=2a+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$，整理得：

$\frac{x_2}{x_1}=-x_2^2-x_1x_2+2ax_2+1=-\left(x_2+\frac{x_1-2a}{2}\right)^2+1+\frac{(x_1-2a)^2}{4}\le 1+\frac{(x_1-2a)^2}{4}$，因为$0<x_1<a$，所以

$1+\frac{(x_1-2a)^2}{4}<1+a^2$，综上：$\frac{x_2}{x_1}<a^2+1$，证毕.

【点睛】极值点偏移问题，是比较有难度的题目，一般处理思路有构造差函数，对数平均不等式，多元化单元等方法.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。