# 高 三 数 学

**考生注意：**

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合与常用逻辑用语、函数、导数及其应用、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列。

**一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 已知复数 $z$ 满足 $iz=1+ai$，且 $|z|=2$，则 $a=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\pm\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\pm 1$

2. 已知集合 $S=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{x|x=4k+3,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $S\cup T=$

A. $S$　　B. $T$　　C. $\mathbf{Z}$　　D. $\mathbf{R}$

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=27$，$a_5=\frac{1}{3}$，则 $a_3=$

A. 3 或 $-3$　　B. $-9$ 或 9　　C. 3　　D. 9

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(6,10)$，$\boldsymbol{c}=(x,-2)$。若 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则 $x=$

A. $-2$　　B. $-3$　　C. $\frac{7}{6}$　　D. $\frac{7}{3}$

5. 已知 $\theta\in(0,\pi)$，$\sin(\pi-\theta)+\cos(2\pi-\theta)=\frac{1}{4}$，则 $\sin\left(2\theta+\frac{3\pi}{2}\right)=$

A. $\frac{\sqrt{31}}{16}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{31}}{16}$　　C. $-\frac{15}{32}$　　D. $-\frac{\sqrt{31}}{16}$

6. 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上游回产地产卵，研究鲑鱼的科学家发现鲑鱼的游速(单位：m/s)可以表示为 $v=\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}$，其中 $Q$ 表示鲑鱼的耗氧量的单位数。当一条鲑鱼以 $\frac{3\ln 2}{\ln 3}$ m/s 的速度游动时，其耗氧量是静止时耗氧量的倍数为

A. $\frac{8}{3}$　　B. 8　　C. 32　　D. 64

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，前 $n$ 项和为 $S_n$，当首项 $a_1$ 和 $d$ 变化时，$a_3+a_9+a_{15}$ 是一个定值，则使 $S_n$ 为定值的 $n$ 的最小值为

A. 15　　B. 17　　C. 19　　D. 21

8. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(-x)$，且 $f(1)=3$，则 $f(2\,018)+f(2\,019)$ 的值为

A. $-3$　　B. 0　　C. 3　　D. 6

9. 在△$ABC$ 中，角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，若 $a^2\tan B=b^2\tan A$，则△$ABC$ 一定是

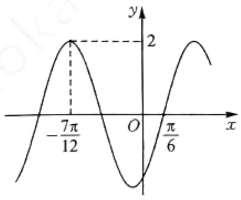
A. 等腰三角形

B. 等腰三角形或直角三角形

C. 直角三角形

D. 等腰直角三角形

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则




A. $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

D. $g(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12}+k\pi,0\right)(k\in\mathbf{Z})$

11. 定义 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，如 $[0.39]=0$，$[1.28]=1$. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=[\log_2 n]$，$S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，则 $S_{2\,047}=$

A. $2^{11}+2$　　B. $3\times2^{11}+2$

C. $6\times2^{11}+2$　　D. $9\times2^{11}+2$

12. 当 $x\geqslant0$ 时，$\frac{xe^x}{x+1}\geqslant a\ln(x+1)$ 恒成立，则 $a$ 的取值范围为

A. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$　　B. $(-\infty,e]$

C. $(-\infty,1]$　　D. $(-\infty,0]$

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13. 设 $x\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，且 $\frac{1}{1+i}+\frac{x}{1-i}\in\mathbf{R}$，则 $x=$__________.

14. 若曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $P(a,\sqrt{a})$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 2，则实数 $a$ 的值是__________.

15. 一游客在 $A$ 处望见在正北方向有一塔 $B$，在北偏西 45° 方向的 $C$ 处有一寺庙，此游客骑车向西行 1 km 后到达 $D$ 处，这时塔和寺庙分别在北偏东 30° 和北偏西 15°，则塔 $B$ 与寺庙 $C$ 的距离为________ km.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，首项 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}-2a_n-1=0$，若 $(-1)^n\lambda\leqslant S_n+2n$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 $\lambda$ 的取值范围是__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知向量 $\boldsymbol{m}=(\cos x,2\cos x)$，$\boldsymbol{n}=(2\cos x,\sqrt{3}\sin x)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}-1$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期及 $f(x)$ 取得最小值时 $x$ 的值；

(2)若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求 $f(x)$ 的单调区间和最大值.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1}=3a_n+1$.

(1)证明：数列 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列；

(2)设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$b_{n+1}-b_n=a_n+\frac{1}{2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

19.（本小题满分 12 分）

在△$ABC$ 中，$a,b,c$ 分别为内角 $A,B,C$ 的对边，$2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b+c}{a}$，且 $BC$ 边上的中线长为 $\sqrt{13}$，$c=6$.

(1)求角 $A$ 的大小；

(2)求△$ABC$ 的面积.

20.(本小题满分 12 分)

设 $S_n$ 为数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和,$S_n=n^2$,数列$\{b_n\}$满足 $b_2=a_3$,$b_{n+1}=b_n+2$.

(1)求 $a_n$ 及 $b_n$;

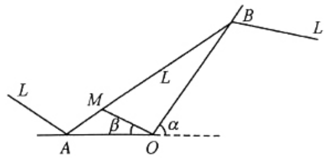
(2)记$\langle n\rangle$表示 $n$ 的个位数字,如$\langle 6174\rangle=4$,求数列$\left\{\dfrac{1}{\langle a_n\rangle\cdot\langle b_n\rangle}\right\}$的前 20 项和.

21.(本小题满分 12 分)

如图,某城市有一条公路从正西方 $AO$ 通过市中心 $O$ 后转向东偏北 $\alpha$ 角方向的 $OB$. 位于该市的某大学 $M$ 与市中心 $O$ 的距离 $OM=3\sqrt{13}$ km,且$\angle AOM=\beta$. 现要修筑一条铁路 $L$,$L$ 在 $OA$ 上设一站 $A$,在 $OB$ 上设一站 $B$,铁路在 $AB$ 部分为直线段,且经过大学 $M$. 其中 $\tan\alpha=2$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$,$AO=15$ km.

(1)求大学 $M$ 与站 $A$ 的距离 $AM$;

(2)求铁路 $AB$ 段的长.




22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$.

(1)讨论 $f(x)$在$(0,\pi)$上的单调性;

(2)若 $g(x)=\dfrac{x^2}{4}-f(x)+1$,证明:函数 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有三个零点.

# 高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B 由 $iz=1+ai$,得 $z=\frac{1+ai}{i}=a-i$,由 $|z|=2$,得 $\sqrt{a^2+1}=2$,解得 $a=\pm\sqrt{3}$. 故选 B.

2. A $\forall t\in T$,则 $t=4k+3=2(2k+1)+1(k\in\mathbf{Z})$,所以 $t\in S$,故 $T\subseteq S$. 又 $5\in S$,但 $5\notin T$,所以 $T\subsetneqq S$,所以 $S\cup T=S$,又 $2\in\mathbf{Z}$,$2\in\mathbf{R}$,但 $2\notin S\cup T$. 故选 A.

3. C $a_3$ 是 $a_1$ 和 $a_5$ 的等比中项,故 $a_3^2=a_1a_5=9$,解得:$a_3=\pm3$,由等比数列的符号特征知 $a_3=3$. 故选 C.

4. D $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(12,14)$,由 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,得 $12x-28=0$,因此 $x=\frac{7}{3}$. 故选 D.

5. A 因为 $\sin(\pi-\theta)+\cos(2\pi-\theta)=\frac{1}{4}$,得 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$,所以 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{16}$,则 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$,所以 $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{16}<0$,又 $\theta\in(0,\pi)$,所以 $\cos\theta<0$,$\sin\theta>0$,因此 $\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}=-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=-\sqrt{\frac{31}{16}}=-\frac{\sqrt{31}}{4}$,因此 $\sin\left(2\theta+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos2\theta=-(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{\sqrt{31}}{16}$. 故选 A.

6. D 因为 $v=\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}$,所以当鲑鱼静止时,$v=0$ m/s,即 $\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}=0$,所以 $\frac{Q}{100}=1$,所以 $Q=100$,当 $v=\frac{3\ln2}{\ln3}$ m/s,即 $\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}=\frac{3\ln2}{\ln3}=\frac{\ln8}{\ln3}=\log_3 8$,所以 $\log_3\frac{Q}{100}=2\log_3 8=\log_3 64$,所以 $\frac{Q}{100}=64$,所以 $Q=6\ 400$,又 $\frac{6\ 400}{100}=64$. 故选 D.

7. B 因为 $a_3+a_9+a_{15}=3a_1+24d=3(a_1+8d)=3a_9$,所以 $a_9$ 为定值. 又 $S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9$,所以 $S_{17}$ 为定值. 故选 B. 更多试题与答案,关注微信公众号:三晋高中指南

8. A $\because f(x)$ 为奇函数且 $f(2+x)=f(-x)$,$\therefore f(2+x)=-f(x)$,$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,$\therefore f(2\ 018)+f(2\ 019)=f(4\times504+2)+f(4\times504+3)=f(2)+f(3)$,又 $f(2)=f(0)=0$,$f(3)=f(-1)=-f(1)=-3$,$\therefore f(2\ 018)+f(2\ 019)=-3$. 故选 A.

9. B $\because a^2\tan B=b^2\tan A$,由正弦定理,得 $\frac{\sin^2A\sin B}{\cos B}=\frac{\sin^2B\sin A}{\cos A}$. $\because\sin A\sin B\neq0$,$\therefore\frac{\sin A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\cos A}$,$\therefore\sin A\cos A=\sin B\cos B$,即 $\sin2A=\sin2B$. $\because A,B\in(0,\pi)$,$A+B\in(0,\pi)$,$\therefore 2A=2B$,或 $2A+2B=\pi$,$\therefore A=B$,或 $A+B=\frac{\pi}{2}$,即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形. 故选 B.

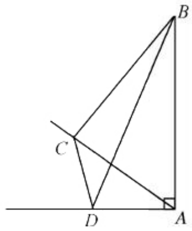
10. C 由函数图象可知,$A=2$,设 $f(x)$ 的最小正周期为 $T$,则 $\frac{3}{4}T=\frac{\pi}{6}+\frac{7\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$,故 $T=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$,因为将点 $f\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=2$,所以 $\sin\left[2\times\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+\varphi\right]=1$,故 $-\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$,故 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,故 A 错误;将函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,得到 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,故 B 错误;当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,由于 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增,故 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增,故 C 正确;对于 D,令 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$,则 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $g(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$,故 D 错误. 故选 C.

11. D 当 $0\leqslant\log_2 n<1$ 时,$n=1$,即 $a_1=0$(共 1 项);当 $1\leqslant\log_2 n<2$ 时,$n=2,3$,即 $a_2=a_3=1$(共 2 项);当 $2\leqslant\log_2 n<3$ 时,$n=4,5,6,7$,即 $a_4=a_5=a_6=a_7=2$(共 4 项);$\cdots$;当 $k\leqslant\log_2 n<k+1$ 时,$n=2^k,2^k+1,\cdots,2^{k+1}-1$,即 $a_{2^k}=a_{2^k+1}=\cdots=a_{2^{k+1}-1}=k$(共 $2^k$ 项),由 $1+2+2^2+\cdots+2^k=2\ 047$,得 $\frac{1-2^{k+1}}{1-2}=2\ 047$,即 $2^{k+1}=2\ 048$,所以 $S_{2\ 047}=0\times1+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+10\times2^{10}$,利用错位相减法可得 $S_{2\ 047}=9\times2^{11}+2$. 故选 D.

12. C ①当 $a\leqslant 1$ 时,设 $f(x)=e^x-x-1$, $f'(x)=e^x-1\geqslant 0(x\geqslant 0)$,所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上递增,且 $f(0)=0$,故 $e^x\geqslant x+1$,所以$\frac{xe^x}{x+1}\geqslant x$. 设 $h(x)=x-\ln(x+1)$,同理可得 $x\geqslant\ln(x+1)\geqslant 0$,则$\frac{xe^x}{x+1}\geqslant x\geqslant\ln(x+1)\geqslant a\ln(x+1)$. ②当 $a>1$ 时,设 $t(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$, $t'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}\geqslant 0(x\geqslant 0)$,所以 $t(x)$在$[0,+\infty)$上递增,且 $t(0)=0$,故 $\ln(x+1)\geqslant\frac{x}{x+1}$,所以当 $x\in[0,+\infty)$时, $a\ln(x+1)>\frac{ax}{x+1}$, $\frac{ax}{x+1}-\frac{xe^x}{x+1}=\frac{x}{x+1}(a-e^x)$,取 $x_0=\ln a$,则 $x_0\in(0,+\infty)$, $\frac{ax_0}{x_0+1}=\frac{x_0e^{x_0}}{x_0+1}$,所以 $a\ln(x_0+1)>\frac{x_0e^{x_0}}{x_0+1}$,故当 $a>1$ 时不符合题意. 综上可知, $a$ 的取值范围为$(-\infty,1]$. 故选 C.

13. 1 $\because \frac{1}{1+i}+\frac{x}{1-i}=\frac{1-i+x(1+i)}{2}=\frac{x+1+(x-1)i}{2}\in\mathbf{R}$, $\therefore \frac{x-1}{2}=0$, $\therefore x=1$.

14. 4 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,则切线斜率 $k=\frac{1}{2\sqrt{a}}$,则过 $P(a,\sqrt{a})$的切线方程为 $y-\sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$,与坐标轴交点分别为$\left(0,\frac{\sqrt{a}}{2}\right)$, $(-a,0)$,又所成三角形面积为2,得$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot a=2$,所以 $a=4$.




15. $\sqrt{2}$ 如图,在$\triangle ABD$中, $AD=1$,可得 $AB=\sqrt{3}$. 在$\triangle ACD$中, $AD=1$, $\angle ADC=105^\circ$, $\angle DCA=30^\circ$, $\therefore \frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle DCA}$, $\therefore AC=\frac{AD\cdot\sin\angle ADC}{\sin\angle DCA}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. 在$\triangle ABC$中, $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos 45^\circ=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}+3-2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2$, $\therefore BC=\sqrt{2}$(km).

16. $[-3,8]$ $\because a_{n+1}-2a_n-1=0$, $\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$, $\therefore$数列$\{a_n+1\}$是以 $a_1+1=2$ 为首项,公比为2的等比数列, $\therefore a_n+1=2^n$, $a_n=2^n-1$. 因此 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$. 则$(-1)^n\lambda\leqslant 2^{n+1}+n-2$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立. 当 $n$ 为奇数时, $-\lambda\leqslant(2^{n+1}+n-2)_{\min}$, $-\lambda\leqslant 3$, $\lambda\geqslant -3$;当 $n$ 为偶数时, $\lambda\leqslant(2^{n+1}+n-2)_{\min}$, $\lambda\leqslant 8$. 综上,实数 $\lambda$ 的取值范围是$[-3,8]$.

17. 解:(1) $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}-1=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

$\therefore$最小正周期 $T=\pi$. ………………………………………………………………………… 2分

令 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

故 $f(x)$取得最小值时 $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. ……………………………………………… 5分

(2)令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增,在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减, ……………………………… 7分

故所求单调递增区间为$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$,单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.

根据单调性可知,当 $x=\frac{\pi}{6}$时 $f(x)$取最大值2,

$\therefore f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为2. ………………………………………………………… 10分

18. (1)证明:因为 $a_{n+1}=3a_n+1$,所以 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$, ……………………………………… 2分

因为 $a_1=\frac{1}{2}$,所以 $a_1+\frac{1}{2}=1\neq 0$. 所以 $a_n+\frac{1}{2}\neq 0$, ………………………………………… 3分

所以$\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{2}}=3$,所以$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是首项为1,公比为3的等比数列. ……………………… 5分

(2)解:由(1)得 $a_n+\frac{1}{2}=3^{n-1}$,所以 $a_n=3^{n-1}-\frac{1}{2}$, ……………………………………………

因为 $b_{n+1}-b_n=a_n+\frac{1}{2}$，所以 $b_{n+1}-b_n=3^{n-1}$， ………………………… 8 分

所以 $b_2-b_1=3^0,b_3-b_2=3^1,\cdots,b_n-b_{n-1}=3^{n-2}(n\geqslant2)$，

各式相加得 $b_n-b_1=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-2}=\frac{1(1-3^{n-1})}{1-3}=\frac{3^{n-1}-1}{2}$， ………………………… 10 分

又 $b_1=1$，所以 $b_n=\frac{3^{n-1}-1}{2}+1=\frac{3^{n-1}+1}{2}$， ………………………… 11 分

又当 $n=1$ 时，$b_1=1$ 满足上式，所以 $b_n=\frac{3^{n-1}+1}{2}$. ………………………… 12 分

19. 解：(1)由正弦定理得 $2\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin B+\sin C$，

所以 $\sin A(\sqrt{3}\sin B+\cos B)=\sin B+\sin C$. ………………………… 2 分

因为 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $\sin A(\sqrt{3}\sin B+\cos B)=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

即 $\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin A\cos B=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin B+\cos A\sin B$，

整理得 $\sin B(\sqrt{3}\sin A-\cos A-1)=0$. ………………………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq0$，所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A-1=0$，即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. ………………………… 5 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 6 分

(2)设 $BC$ 的中点为 $D$，根据向量的平行四边形法则可知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$， ………………………… 7 分

所以 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=4\overrightarrow{AD}^2$，即 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=4\overrightarrow{AD}^2$， ………………………… 9 分

因为 $c=6$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以 $6^2+b^2+6b=52$，解得 $b=2$ 或 $b=-8$(舍去). ………………………… 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

20. 解：(1)当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$， ………………………… 2 分

由于 $a_1=S_1=1$ 也满足 $a_n=2n-1$，则 $a_n=2n-1$. ………………………… 3 分

$\because b_2=a_3=5$，$b_{n+1}-b_n=2$，$\therefore b_1=3$，$\therefore\{b_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，$\therefore b_n=2n+1$. ………………………… 6 分

(2)$\because a_n=2n-1$，$\therefore\{\langle a_n\rangle\}$ 的前 5 项依次为 1，3，5，7，9. ………………………… 7 分

$\because b_n=2n+1$，$\therefore\{\langle b_n\rangle\}$ 的前 5 项依次为 3，5，7，9，1. ………………………… 8 分

易知，数列 $\{\langle a_n\rangle\}$ 与 $\{\langle b_n\rangle\}$ 的周期均为 5， ………………………… 9 分

$\therefore\left\{\frac{1}{\langle a_n\rangle\cdot\langle b_n\rangle}\right\}$ 的前 20 项和为 $4\left(\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times1}\right)$

$=4\times\left[\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9}\right]=4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{20}{9}$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)在 $\triangle AOM$ 中，$AO=15$，$\angle AOM=\beta$ 且 $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}$，$OM=3\sqrt{13}$，由余弦定理，得

$AM^2=OA^2+OM^2-2OA\cdot OM\cdot\cos\angle AOM$

$=(3\sqrt{13})^2+15^2-2\times3\sqrt{13}\times15\times\frac{3}{\sqrt{13}}$

$=13\times9+15\times15-2\times3\times15\times3=72$，

$\therefore AM=6\sqrt{2}$，即大学 $M$ 与站 $A$ 的距离 $AM$ 为 $6\sqrt{2}$ km. ………………………… 5 分

(2)$\because\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}$，且 $\beta$ 为锐角，$\therefore\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}$. …………………………

在 $\triangle AOM$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AM}{\sin\beta}=\frac{OM}{\sin\angle MAO}$，

即$\frac{\frac{6\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{\sin\angle MAO}$，$\therefore\sin\angle MAO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又$\angle MAO$为锐角，$\therefore\angle MAO=\frac{\pi}{4}$，……………… 8分

$\therefore\angle ABO=\alpha-\frac{\pi}{4}$. $\because\tan\alpha=2$，$\therefore\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

$\therefore\sin\angle ABO=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

又$\angle AOB=\pi-\alpha$，$\therefore\sin\angle AOB=\sin(\pi-\alpha)=\frac{2}{\sqrt{5}}$. ……………… 10分

在$\triangle AOB$中，$AO=15$，由正弦定理，得$\frac{AB}{\sin\angle AOB}=\frac{AO}{\sin\angle ABO}$，

即$\frac{AB}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{15}{\frac{1}{\sqrt{10}}}$，$\therefore AB=30\sqrt{2}$，即铁路$AB$段的长$AB$为$30\sqrt{2}$ km. ……………… 12分

22.(1)解：$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$. ……………… 1分

令$f'(x)=0$，则$x=\frac{\pi}{2}$. ……………… 2分

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

所以$f(x)$的单调递增区间是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，递减区间是$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. ……………… 4分

(2)证明：$g(x)=\frac{x^2}{4}-x\sin x-\cos x+1$，

因为$g(0)=0$，所以0是$g(x)$的一个零点. ……………… 5分

又$g(-x)=\frac{(-x)^2}{4}-(-x)\sin(-x)-\cos(-x)+1=\frac{x^2}{4}-x\sin x-\cos x+1=g(x)$，

所以$g(x)$是偶函数，更多试题与答案，关注微信公众号：三晋高中指南

即要确定$g(x)$在$\mathbf{R}$上的零点个数，需确定$x>0$时，$g(x)$的零点个数即可. ……………… 6分

①当$x>0$时，$g'(x)=\frac{x}{2}-x\cos x=\frac{x}{2}(1-2\cos x)$，

令$g'(x)=0$，即$\cos x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$或$x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{N})$.

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，且$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi^2}{36}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}<0$，

当$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，且$g\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{25}{36}\pi^2+\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}>0$，

所以$g(x)$在$\left(0,\frac{5}{3}\pi\right)$上有唯一零点. ……………… 8分

②当$x\geqslant\frac{5}{3}\pi$时，由于$\sin x\leqslant1$，$\cos x\leqslant1$.

$g(x)=\frac{x^2}{4}-x\sin x-\cos x+1\geqslant\frac{x^2}{4}-x-1+1=\frac{x^2}{4}-x=t(x)$，……………… 9分

而$t(x)$在$\left[\frac{5}{3}\pi,+\infty\right)$单调递增，$t(x)\geqslant t\left(\frac{5}{3}\pi\right)>0$.

所以$g(x)>0$恒成立，故$g(x)$在$\left[\frac{5}{3}\pi,+\infty\right)$无零点，……………… 10分

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$有一个零点. ……………… 11分

由于$g(x)$是偶函数，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$有一个零点，而$g(0)=0$，

综上所述，函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上有且仅有三个零点. ………………

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。