2022 年全国高考乙卷（理科）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合M满足$C_U M=\{1,3\}$，则

A. $2\in M$　　B. $3\in M$

B. C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

解析：由题设，易知$M=\{2,4,5\}$，对比选项，选择 A.

2. 已知$z=1-2i$，且$z+a\cdot\bar{z}+b=0$，其中a,b为实数，则

A. $a=1,b=-2$　　B. $a=-1,b=2$

C. $a=1,b=2$　　D. $a=-1,b=-2$

解析：由题设，$z=1-2i$，$\bar{z}=1+2i$，代入有$a+b+1+(2a-2)i=0$，

故$a=1,b=-2$，选择 A.

3. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则$\vec{a}\bullet\vec{b}=$

A. -2　　B. -1

B. C. 1　　D. 2

解析：由题设，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，得$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\bullet\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9$，代入$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，

有$4\vec{a}\bullet\vec{b}=4$，故$\vec{a}\bullet\vec{b}=1$.选择 C.

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造卫星.为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列$\{b_n\}$：

$b_1=1+\frac{1}{a_1}$，$b_2=1+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$，$b_3=1+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}$，……，以此类推，其中

其中$a_k\in N^*$，$(k=1,2,\ldots)$则

A. $b_1<b_5$　　B. $b_3<b_8$　　C. $b_6<b_2$　　D. $b_4<b_7$

解析：由已知，$b_1=1+\frac{1}{a_1}$，$b_2=1+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$，$\frac{1}{a_1}>\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$，故$b_1>b_2$；同理可得$b_2<b_3$，

$b_1 > b_3$，又因为 $\dfrac{1}{a_2} > \dfrac{1}{a_2+\dfrac{1}{a_3+\dfrac{1}{a_4}}}$，故 $b_2 < b_4$；于是得 $b_1 > b_3 > b_5 > b_7 > \ldots$，排除 A，

$\dfrac{1}{a_2} > \dfrac{1}{a_2+\dfrac{1}{a_3+\ldots\dfrac{1}{a_6}}}$，故 $b_2 < b_6$，排除 C，而 $b_1 > b_7 > b_8$，排除 B.故选择 D.

方法二：（取特殊值）取 $a_n = 1$，于是有 $b_1 = 2$，$b_2 = \dfrac{3}{2}$，$b_3 = \dfrac{5}{3}$，$b_4 = \dfrac{8}{5}$，……，

分子分母分别构成斐波那契数列，于是有 $b_5 = \dfrac{13}{8}$，$b_6 = \dfrac{21}{13}$，$b_7 = \dfrac{34}{21}$，$b_8 = \dfrac{55}{34}$.

于是得 $b_1 > b_5$，$b_3 = 1+\dfrac{2}{3} > 1+\dfrac{22}{33} > 1+\dfrac{21}{34} = b_8$，$b_6 = 1+\dfrac{8}{13} > 1+\dfrac{1}{2} = b_2$.对比选项，选 D.

5.设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3,0)$，若 $|AF| = |BF|$，则 $|AB| =$

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．$3\sqrt{2}$

解析：易知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，

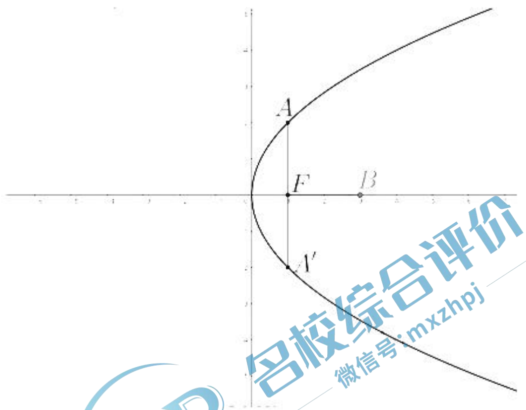
于是有 $|BF| = 2$，故 $|AF| = 2$，注意到

抛物线通径 $2p = 4$，通径为抛物线

最短的焦点弦，分析知 AF 必为

半焦点弦，于是有 $AF \perp x$ 轴，

于是有 $|AB| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.



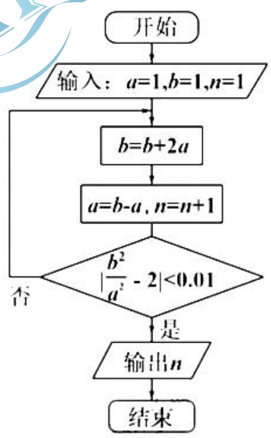
6. 执行右边的程序框图，输出的 $n =$

A．3

B．4

C．5

D．6



【答案】B

【解析】

第一次循环：$b=1+1\times2=3$，$a=3-1=2$，$n=1+1=2$，$|\frac{b^2}{a^2}-2|=|(\frac{3}{2})^2-2|=\frac{1}{4}>0.01$

第二次循环：$b=3+2\times2=7$，$a=7-2=5$，$n=2+1=3$，$|\frac{b^2}{a^2}-2|=|(\frac{7}{5})^2-2|=\frac{1}{25}>0.01$

第三次循环：$b=7+2\times5=17$，$a=17-5=12$，$n=3+1=4$，$|\frac{b^2}{a^2}-2|=|(\frac{17}{12})^2-2|=\frac{1}{144}<0.01$

故输出 $n=4$

故选 B

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB，BC 的中点，则

A．平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1　　　　B．平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C．平面 $B_1EF//$ 平面 A_1AC　　　　D．平面 $B_1EF//$ 平面 A_1C_1D

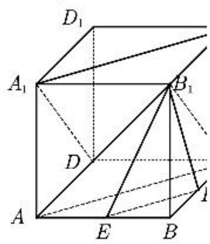
【答案】A

【解析】

对于 A 选项：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 EF 分别为 AB，BC 的中点，易知 $EF\perp BD$，从而 $EF\perp$ 平面 BDD_1，又因为 $EF\subset$ 平面 BDD_1，所以平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1，所以 A 选项正确；

对于 B 选项：因为平面 $A_1BD\cap$ 平面 $BDD_1=BD$,由上述过程易知平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD 不成立；

对于 C 选项：由题意知直线 AA_1 与直线 B_1E 必相交，故平面 $B_1EF//$ 平面 A_1AC 有公共点，从而 C 选项错误；



对于 D 选项：连接 AC，AB_1，B_1C，易知平面 $AB_1C//$ 平面 A_1C_1D，又因为平面 AB_1C 与平面 B_1EF 有公共点 B_1，故平面 AB_1C 与平面 B_1EF 不平行，所以 D 选项错误

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则 $a_6=$

A．14　　B．12　　C．6　　D．3

【答案】D

【解析】

设等比数列 $\{a_n\}$ 首项 a_1，公比 q

由题意，$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=168 \\ a_2-a_5=42 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a_1(1+q+q^2)=168 \\ a_1q(1-q^3)=42 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a_1(1+q+q^2)=168 \\ a_1q(1-q)(1+q+q^2)=42 \end{cases}$

解得，$q=\dfrac{1}{2}$，$a_1=96$，所以 $a_6=a_1q^5=3$

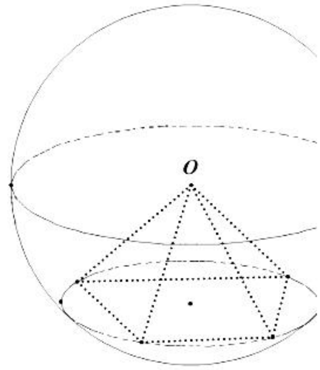
故选 D

9. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为

A. $\dfrac{1}{3}$　　　B. $\dfrac{1}{2}$　　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】



考虑与四棱锥的底面形状无关，不是一般性，假设底面是边长为 a 的正方形，底面所在圆面的半径为 r，则 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

所以该四棱锥的高 $h=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}$，所以体积

$$V=\frac{1}{3}a^2\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a^2}{4}(1-\frac{a^2}{2})}\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{(\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+1-\frac{a^2}{2}}{3})^3}=\frac{4}{3}\sqrt{(\frac{1}{3})^3}=\frac{4}{9}$$

当且仅当 $\dfrac{a^2}{4}=1-\dfrac{a^2}{2}$，即 $a^2=\dfrac{4}{3}$ 时，等号成立

所以该四棱锥的高 $h=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2}}=\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

故选 C

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立。已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1，p_2，p_3 且 $p_3>p_2>p_1>0$.记该棋手连胜两盘的概率为 p，则

A．p 与该棋手和甲，乙，丙的比赛次序无关

B．该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

C．该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大

D．该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

【答案】D

【解析】

设棋手在第二盘与甲比赛连赢两盘的概率为$P_{甲}$，在第二盘与乙比赛连赢两盘的概率为$P_{乙}$，在第二盘与丙比赛连赢两盘的概率为$P_{丙}$

由题意

$P_{甲}=p_1[p_2(1-p_3)+p_3(1-p_2)]=p_1p_2+p_1p_3-2p_1p_2p_3$

$P_{乙}=p_2[p_1(1-p_3)+p_3(1-p_1)]=p_1p_2+p_2p_3-2p_1p_2p_3$

$P_{丙}=p_3[p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)]=p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3$

所以$P_{丙}-P_{甲}=p_2(p_3-p_1)>0$，$P_{丙}-P_{乙}=p_1(p_3-p_2)>0$

所以$P_{丙}$最大，故选 D.

11．双曲线C的两个焦点F_1，F_2，以C的实轴为直径的圆记为D，过F_1作D的切线与C交于M，N两点，且$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则$C$的离心率为

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{17}}{2}$

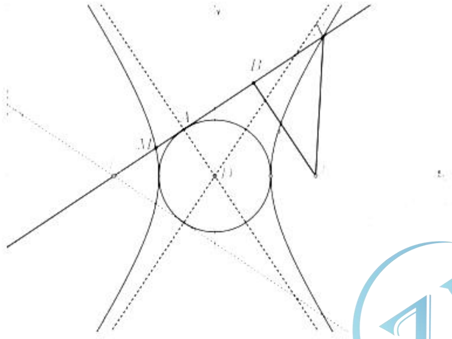
【答案】C

【解析】由题意，点N在双曲线右支. 记切点为点A，连接OA，则$OA\perp MN$，$|OA|=a$，又$|OF_1|=c$，则$|AF_1|=\sqrt{c^2-a^2}=b$. 过点F_2作$F_2B\perp MN$交直线MN于点B，连接F_2N，则$F_2B//OA$，又点O为F_1F_2中点，则$|F_2B|=2|OA|=2a$，$|F_1B|=2|AF_1|=2b$. 由$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，得$\sin\angle F_1NF_2=\frac{4}{5}$，$\tan\angle F_1NF_2=\frac{4}{3}$，

所以$|F_2N|=\frac{|F_2B|}{\sin\angle F_1NF_2}=\frac{5a}{2}$，$|BN|=\frac{|F_2B|}{\tan\angle F_1NF_2}=\frac{3a}{2}$.

故$|F_1N|=|F_1B|+|BN|=2b+\frac{3a}{2}$，由双曲线定义，$|F_1N|-|F_2N|=2a$，

则$2b-a=2a$，即$\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$，所以$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.



12．已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为R，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$．若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$

A．-21　　　　B．-22　　　　C．-23　　　　D．-24

【答案】D

【解析】若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，则 $g(2-x)=g(2+x)$，因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(-x)+g(2+x)=5$，故 $f(-x)=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数．由 $g(2)=4$，$f(0)+g(2)=5$，得 $f(0)=1$．由 $g(x)-f(x-4)=7$，得 $g(2-x)=f(-x-2)+7$，代入 $f(x)+g(2-x)=5$，得 $f(x)+f(-x-2)=-2$，$f(x)$ 关于点 $(-1,-1)$ 中心对称，所以 $f(1)=f(-1)=-1$．由 $f(x)+f(-x-2)=-2$，$f(-x)=f(x)$，得 $f(x)+f(x+2)=-2$，所以 $f(x+2)+f(x+4)=-2$，故 $f(x+4)=f(x)$，$f(x)$ 周期为4．由 $f(0)+f(2)=-2$，得 $f(2)=-3$，又 $f(3)=f(-1)=f(1)=-1$，所以 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=6f(1)+6f(2)+5f(3)+5f(4)=11\times(-1)+5\times1+6\times(-3)=-24$．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为________.

【答案】$\frac{3}{10}$

【解析】设“甲、乙都入选”为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$．

14、过四点(0,0)，(4,0)，(−1,1)，(4,2)中的三点的一个圆的方程为__________

【答案】$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$ 或 $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$

【解析】设点 A(0,0)，B(4,0)，C(−1,1)，D(4,2)，圆过其中三点共有四种情况，解决办

法是两条中垂线的交点为圆心，圆心到任一点的距离为半径。

（1） 若圆过 A、B、C 三点，则圆心在直线$x=2$，设圆心坐标为$(2,a)$，则

$4+a^2=9+(a-1)^2\Rightarrow a=3, r=\sqrt{4+a^2}=\sqrt{13}$，

所以圆的方程为$(x-2)^2+(y-3)^2=13$

（2）若圆过 A、B、D 三点，同（1）设圆心坐标为$(2,a)$，则

$4+a^2=4+(a-2)^2\Rightarrow a=1, r=\sqrt{4+a^2}=\sqrt{5}$，所以圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

（3）若圆过 A、C、D 三点，则线段 AC 的中垂线方程为$y=x+1$，线段 AD 的中垂线方程

为$y=-2x+5$，联立得$\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\y=\frac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{49}{9}}=\frac{\sqrt{65}}{3}$，

所以圆的方程为$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$

（4）若圆过 B、C、D 三点，则线段 BD 的中垂线方程为$y=1$，

线段 BC 中垂线方程为$y=5x-7$，联立得$\begin{cases}x=\frac{8}{5}\\y=1\end{cases}\Rightarrow r=\sqrt{\left(\frac{8}{5}-4\right)^2+1}=\frac{13}{5}$，

所以圆的方程为$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$

15、记函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的最小正周期为 T，若$f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$为$f(x)$的零点，则ω的最小值为________

【答案】3

【解析】$f(T)=f(0)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$0<\varphi<\pi$，故$\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$f\left(\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)\Rightarrow\omega=3+9k(k\in Z)$，

又$\omega>0$，故ω的最小值为3.

16、已知$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-ex^2(a>0且a\neq1)$的极小值点和极大值点，若$x_1<x_2$，则$a$的取值范围是__________

【答案】$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$

【解析】$f'(x)=2\left(a^x\ln a-ex\right)$至少要有两个零点$x=x_1$和$x=x_2$，我们对其求导，

$f''(x)=2a^x(\ln a)^2-2e$，

（1）若$a>1$，则$f''(x)$在R上单调递增，此时若$f''(x_0)=0$，则$f'(x)$在$(-\infty,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，此时若有$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-ex^2(a>0且a\neq1)$的极小值点和极大值点，则$x_1>x_2$，不符合题意。

（2）若$0<a<1$，则$f''(x)$在R上单调递减，此时若$f''(x_0)=0$，则$f'(x)$在$(-\infty,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减，且$x_0=\log_a\dfrac{e}{(\ln a)^2}$。此时若有$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-ex^2(a>0且a\neq1)$的极小值点和极大值点，且$x_1<x_2$，则需满足$f'(x_0)>0$，即

$$\frac{e}{\ln a}>e\log_a\frac{e}{(\ln a)^2}\Rightarrow a^{\frac{1}{\ln a}}>\frac{e}{(\ln a)^2}\Rightarrow \ln a^{\frac{1}{\ln a}}>\ln\frac{e}{(\ln a)^2}\Rightarrow\frac{1}{\ln a}\ln a>1-\ln(\ln a)^2,$$

可解得$a>e$或$0<a<\dfrac{1}{e}$，由于$0<a<1$，取交集即得$0<a<\dfrac{1}{e}$。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

记ΔABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知

$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

(1)证明：$2a^2=b^2+c^2$；

(2)若 $a=5$，$\cos A=\dfrac{25}{31}$，求 ΔABC 的周长.

【答案】（1）见证明过程；（2）14；

【解析】1.已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$ 可化简为

$\sin C\sin A\cos B-\sin C\cos A\sin B=\sin B\sin C\cos A-\sin B\cos C\sin A$，

由正弦定理可得 $ac\cos B-bc\cos A=bc\cos A-ab\cos C$，即 $ac\cos B=2bc\cos A-ab\cos C$，

由余弦定理可得 $ac\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2bc\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-ab\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即证 $2a^2=b^2+c^2$，

（2）由（1）可知 $b^2+c^2=2a^2=50$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{50-25}{2bc}=\dfrac{25}{2bc}=\dfrac{25}{31}$，$\therefore 2bc=31$，

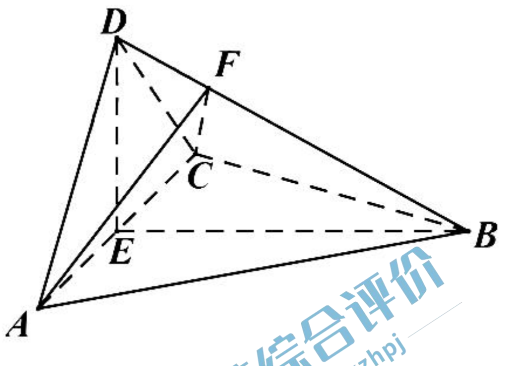
$\because b^2+c^2+2bc=(b+c)^2=81$，$\therefore b+c=9$，$\therefore a+b+c=14$，$\therefore \Delta ABC$ 的周长为 14

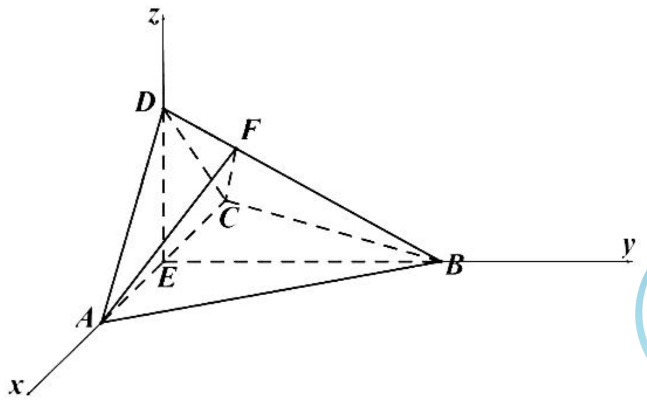
18.（12 分）

如图，四面体 $ABCD$ 中 $AD\perp CD, AD=CD, \angle ADB=\angle BDC$，$E$ 为 AC 中点.

(1) 证明：平面 $BED\perp$ 平面 ACD；

(2) 设 $AB=BD=2, \angle ACB=60^0$，点 F 在 BD 上，当 ΔAFC 的面积最小时，求 CF 与平面 ABD 所成角的正弦值.





解析：（1）$\because AD=CD, \angle ADB=\angle BDC$ 且 BD 为公共边　$\therefore \Delta ADB$ 与 ΔBDC 全等，

$\therefore AB=BC$.

又 $\because E$ 为 AC 中点 且 $AD=CD$, $\therefore DE\perp AC$, 同理 $BE\perp AC$.

又 $\because DE\cap BE=E$, 且均含于平面 BED,

$\therefore AC\perp$ 平面 BED.

又 $\because AC\subset$ 平面 ACD, $\therefore$ 平面 $BED\perp$ 平面 ACD.

(2)在 ΔABC 中，$AB=2, \angle ACB=60^0, AB=BC$ $\therefore AC=2, BE=\sqrt{3}$.

在 ΔACD 中，, $AD\perp CD, AD=CD, AC=2$, E 为 AC 中点，　$\therefore DE\perp AC, DE=1$

又 $\because BD=2, \therefore DE^2+BE^2=BD^2$, 即 $DE\perp BE$.

$\therefore$ 直线 AC、直线 ED、直线 EB 两两互相垂直.

由点 F 在 BD 上且 ΔADB 与 ΔBDC 全等，　$\therefore AF=FC$

由于 E 为 AC 中点　$\therefore EF\perp AC$

当 ΔAFC 的面积最小时　$\therefore EF\perp BD$

在 $Rt\Delta DEB$ 中，$\because BE=\sqrt{3}, DE=1$　$\therefore EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, BF=\dfrac{3}{2}$

如图，以点 E 为坐标原点，直线 AC、EB、ED 分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系.

$C(-1,0,0)$、$A(1,0,0)$、$B(0,\sqrt{3},0)$、$D(0,0,1)$、$F(0,\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4})$

$\overrightarrow{BD}=(0,-\sqrt{3},1)$、$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$、$\overrightarrow{BC}=(-1,-\sqrt{3},0)$

$\because \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=(1,\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4})$

设平面 ABD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$.

可得 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\bullet\vec{m}=0\\ \overrightarrow{AD}\bullet\vec{m}=0\end{cases}$ 设 $y=1$ $\therefore \vec{m}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$

设 $\vec{m}$ 与 $\overrightarrow{CF}$ 所成的角为 α，CF 与平面 ABD 所成角的为 θ

$$\therefore \sin\theta=|\cos\alpha|=\left|\frac{\vec{m}\bullet\overrightarrow{CF}}{|\vec{m}|\bullet|\overrightarrow{CF}|}\right|=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

所以 CF 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

19.（12 分）某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山，为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了 10 棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=0.038$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=1.6158$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=0.2474$.

（1）估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到 0．01）；

（3）现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 $186\ m^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值．

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$， $\sqrt{1.896}\approx 1.377$．

【答案】（1）0.06， 0.39；（2）0.97；（3）1209

【答案】（1）0.06,0.39；（2）0.97；（3）1209

【解析】（1）设这种树木平均一课的根部横截面积为 $\bar{x}$，平均一个的材积量为 $\bar{y}$，

则 $\bar{x}=\dfrac{0.6}{10}=0.06$， $\bar{y}=\dfrac{3.9}{10}=0.39$．

（2）$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right)}}=\dfrac{0.2474-10\times 0.06\times 0.39}{\sqrt{(0.038-10\times 0.06)^2}\sqrt{(1..6158-10\times 0.39)^2}}$

$=\dfrac{0.0134}{\sqrt{0.002\times 0.0948}}=\dfrac{0.0134}{0.01\times\sqrt{1.896}}=\dfrac{0.0134}{0.01377}=0.97$

（3）设从根部面积总和为 X，总材积量为 Y，则 $\dfrac{X}{Y}=\dfrac{\bar{x}}{\bar{y}}$，故 $Y=\dfrac{3.9}{0.6}\times 186=1209$（$m^3$）．

20．（12 分）

已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴，y 轴，且过 $A(0,-2)$，$B(\dfrac{3}{2},-1)$ 两点。

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，证明：直线 HN 过定点.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$；（2）直线 HN 过定点 $(0,-2)$

【解析】（1）设 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，将 $A(0,-2$，$B(\dfrac{3}{2},-1)$ 两点代入得

$\begin{cases}\dfrac{4}{b^2}=1\\ \dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\end{cases}$，解得 $a^2=3$，$b^2=4$，故 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$。

（2）由 $A(0,-2)$，$B(\dfrac{3}{2},-1)$ 可得直线 $AB:y=\dfrac{2}{3}x-2$

①若过 $P(1,-2)$ 的直线的斜率不存在，直线为 $x=1$。代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，可得 $M(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，$N(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，将 $y=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入 $AB: y=\frac{2}{3}x-2$，可得 $T(\sqrt{6}+3,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，得 $H(2\sqrt{6}+5,\frac{2\sqrt{6}}{3})$。易求得此时直线 HN：$y=(2-\frac{2\sqrt{6}}{3})x-2$。过点 $(0,-2)$。

②若过 $P(1,-2)$ 的直线的斜率存在，设 $kx-y-(k+2)=0$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$。

联立 $\begin{cases} kx-y-(k+2)=0 \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$

故有 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4} \\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4} \end{cases}$，$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4} \\ y_1y_2=\frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4} \end{cases}$，且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}$ （*）

联立 $\begin{cases} y=y_1 \\ y=\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$，可得 $T(\frac{3y_1}{2}+3,y_1)$，$H(3y_1+6-x_1,y_1)$，

可求得此时 $HN: y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$

将 $(0,-2)$ 代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$

将（*）式代入，得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$，显然成立。

综上，可得直线 HN 过定点 $(0,-2)$。

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$y=2x$；（2）$a<-1$.

【解析】详解请扫描二维码，微信群获取

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos 2t\\ y=2\sin t\end{cases}$（$t$ 为参数）.以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})+m=0$.

(1) 写出 l 的直角坐标方程；

(2) 若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围.

答案：（1）$\sqrt{3}x+y+2m=0$；（2）$-\dfrac{19}{12}\le m\le\dfrac{5}{2}$.

解析：（1）由 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})+m=0$ 可得，$\rho\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+m=0$，

即 $\rho\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+m=0$，$\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，

故 l 的方程为：$\sqrt{3}x+y+2m=0$.

（2）由 $x=\sqrt{3}\cos 2t$，得 $x=\sqrt{3}(1-2\sin^2 t)=\sqrt{3}[1-2\left(\dfrac{y}{2}\right)^2]=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y^2$，

联立 $\begin{cases}x=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y^2\\ \sqrt{3}x+y+2m=0\end{cases}$，$3y^2-2y-4m-6=0$，

即 $3y^2-2y-6=4m(-2\le y\le 2)$，$-3\le\dfrac{4m}{\sqrt{3}}\le 6$，即 $-\dfrac{19}{3}\le 4m\le 10$，$-\dfrac{19}{12}\le m\le\dfrac{5}{2}$

故 m 的范围是 $-\dfrac{19}{12}\le m\le\dfrac{5}{2}$.

23．[选修 4-5：不等式]（10 分）

已知 a,b,c 为正数，且 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

(1) $abc\leqslant\frac{1}{9}$

(2) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{abc}}$

（1）证明：因为 a,b,c 为正数，所以 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\geqslant3\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}}=3\sqrt{abc}$，当且仅当 $a=b=c=3^{-\frac{2}{3}}$ 时取 等号， 所以 $3\sqrt{abc}\leqslant1$，即 $abc\leqslant\frac{1}{9}$，

得证.

（1）要证 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{abc}}$ 成立，只需证 $\frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{b^{\frac{3}{2}}\sqrt{ac}}{a+c}+\frac{c^{\frac{3}{2}}\sqrt{ab}}{a+b}\leqslant\frac{1}{2}$，

又因为 $b+c\geqslant2\sqrt{bc}$，$a+c\geqslant2\sqrt{ac}$，$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b=c=3^{-\frac{2}{3}}$ 时，同时取等，

所以 $\frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{bc}+b^{\frac{3}{2}}\sqrt{ac}+c^{\frac{3}{2}}\sqrt{ab}}{b+c}\leqslant\frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}\sqrt{ac}}{2\sqrt{ac}}+\frac{c^{\frac{3}{2}}\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{2}=\frac{1}{2}$，

得证.