

六校联盟高一年级联考 (2023. 04)

参考答案

1. C 【详解】 $z = \frac{3+4i}{2+i} = \frac{(3+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{10+5i}{5} = 2+i$, 所 $|z| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

2. C 【详解】 $\because \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反, $\therefore \vec{a} = \lambda \vec{b}$ ($\lambda < 0$). 设 $\vec{a} = (x, y)$, 则

$(x, y) = \lambda(3, -2)$, 于是 $\begin{cases} x = 3\lambda, \\ y = -2\lambda. \end{cases}$ 由 $|\vec{a}| = 3\sqrt{13}$, 得 $x^2 + y^2 = 117$, 即

$9\lambda^2 + 4\lambda^2 = 13\lambda^2 = 117$, $\therefore \lambda^2 = 9$, $\lambda = -3$, $\therefore \vec{a} = (-9, 6)$.

3. D 【详解】 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $A = 60^\circ$, $\therefore \sin^2 A = \sin B \sin C \therefore a^2 = bc$,

由余弦定理可得, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc$, 所以 $bc = b^2 + c^2 - bc$, 即

$(b-c)^2 = 0$, 所以 $b = c$, 结合 $A = 60^\circ$ 可得 $\triangle ABC$ 一定是等边三角形.

4. A 【详解】 由 $2+i$ 是关于 x 的方程 $x^2 - mx + n = 0$ 的一个根, 则 $2-i$ 是关于 x 的方程 $x^2 - mx + n = 0$ 的另一个根, 则 $m = 2-i+2+i = 4$, $n = (2-i) \times (2+i) = 5$, 即 $m = 4$, $n = 5$, 则 $m+n = 9$,

5. B 【详解】 由题意得

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} \cos \theta + (\sqrt{3})^2} = 4$,

解得 $\cos \theta = 0$, 又 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\sin \theta = 1$, 所以 $\vec{a} \oplus \vec{b} = |\vec{a}| = 1$.

6. C 【详解】 截角四面体的体积为大正四面体的体积减去四个相等的小正四面体体积, 由正四面体的体积为 π 可得正四面体棱长 $a=6$

因为棱长为 1 的正四面体的高 $h = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 则棱长为 1 的正四面体

的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$, 所以该截角四面体的体积为

$$V = 18\sqrt{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \times 2^3 = \frac{46\sqrt{2}}{3}.$$

7. D 【详解】设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $c=2$, 则 AB 边上的高 $h = a \sin B = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 由正弦定理得

$$a = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(120^\circ - C)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\tan C} + 1. \because \triangle ABC \text{ 为锐角三角形} \therefore \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}, \text{ 则}$$

$$\tan C > \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } a = \frac{\sqrt{3}}{\tan C} + 1 \in (1, 4), \text{ 从 } \frac{\sqrt{3}}{2} < h < 2\sqrt{3}, \text{ 因此 } AB \text{ 边上的高的}$$

取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$. 提示: 也可画图处理, 考虑临界情况直角三角形时.

8. B 【详解】不妨设向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (m, n)$, 则 $\vec{a} - x\vec{b} = (1 - xm, -xn)$,

$\vec{b} - y\vec{a} = (m - y, n)$, 所以 $|\vec{a} - x\vec{b}|^2 = (1 - mx)^2 + (-xn)^2 = (m^2 + n^2)x^2 - 2mx + 1$, 又对任意

实数 x 有 $|\vec{a} - x\vec{b}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\frac{4(m^2 + n^2) - (-2m)^2}{4(m^2 + n^2)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \therefore n^2 = 3m^2$. 又

$|\vec{b} - y\vec{a}|^2 = (m - y)^2 + n^2$, 对任意实数 y 有 $|\vec{b} - y\vec{a}|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$, 所以 $n^2 = 3$, 所以

$3m^2 = 3$, 即 $m = \pm 1$. 由 $\vec{a} + \vec{b} = (1 + m, n)$, 可得 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (1 + m)^2 + n^2 = m^2 + n^2 + 2m + 1 = 7$

或 3, 故 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ 或 $\sqrt{3}$. 提示: 也可考虑几何方法

9. BD 【详解】对于 A, $3+i, 2+i$ 是虚数, 不能比较大小, 故错误;

对于 B, $i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$, $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2023} = i - 1 - i = -1$ 故正确;

对于 C, $z = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$, 复数 z 对应的点 $(-3, 4)$ 位于第二象限, 故错误;

对于 D, 复数 z 满足 $|z - 1| = |z + 1|$, 即复数 z 对应的点到点 $(1, 0), (-1, 0)$ 的距离相等, 故 z 在复平面内对应的点的轨迹为 $(1, 0), (-1, 0)$ 连线的中垂线, 故正确,

10. ACD 【详解】A. 当 $\vec{a} + \vec{b} = (-4, 4)$ 时, $t = 1$ 故 A 不正确 B. $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -12 + 3t = 0$, $t = 4$, B 正确; $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为钝角时, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12 + 3t < 0$,

$t < 4$, 当 $t = -1$ 时向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 反向, 所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为钝角时 $t < 4$ 且 $t \neq -1$, C 不正

确; $t = 2$ 时, $\vec{b} = (2, 2)$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, D 不正确.

11. ABD 【详解】如图 1, 设圆锥母线为 l , 高为 h , 由半径 $r = \sqrt{3}$, 体积

为 π 得 $V = \frac{1}{3} \pi \sqrt{3}^2 \cdot h = \pi$, 所以 $h = 1$, $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2$, 侧面积为 $\pi r l = 2\sqrt{3}\pi$. A 正

确; 由圆锥的内切球球心 O_1 作 $O_1 D \perp PB$, 垂足为点 D , 设 $O_1 D = O_1 O = R$, 则

$PO_1 = 1 - R$, 由 $\sin \angle OPB = \frac{OB}{PB} = \frac{O_1 D}{PO_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\frac{R}{1-R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $R = 2\sqrt{3} - 3$, 内切球 O_1 的

表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times (2\sqrt{3} - 3)^2 = (84 - 48\sqrt{3})\pi$, 故 B 正确; 选项 C, $\sin \angle OPB = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$0 < \angle OPB < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\angle OPB = 60^\circ$, 则 $\angle APB = 120^\circ$, 过点 P 作平面 α 截圆锥的截面

面积最大时, 对应三角形为等腰直角三角形 $S = \frac{1}{2} l^2 = 2$, 故 C 不正确;

选项 D, 如图 2, 把圆锥的侧面展开一半, 点 A 展开到 A' , $PM = 1$,

$PA' = PA = 2$, $\angle A'PB = \frac{\pi r}{l} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, 由余弦定理

$A'M^2 = PA'^2 + PM^2 - 2 \times PA' \times PM \cos \angle A'PB = 5 - 4 \cos \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$,

所以从 A 点沿圆锥表面到 M 的最近路线长 $A'M = \sqrt{5 - 4 \cos \frac{\sqrt{3}\pi}{2}}$, 故 D 正确.

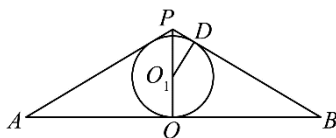


图1

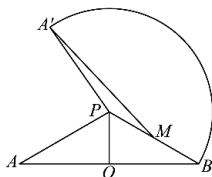
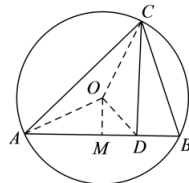


图2



12 题图

12. AC 【解析】在 $\triangle ABC$ 中 $\because c \sin A = \sqrt{3}a \cos C$,

$\therefore \sin C \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos C$, 又 $\sin A > 0$, $\tan C = \sqrt{3}$, $C = \frac{\pi}{3}$, 故 A 正确;

又 $c=6$, 所以 $2R = \frac{c}{\sin C} = 4\sqrt{3}$, 故 $R = 2\sqrt{3}$, B 不正确; 取 AB 的中点 M , 如图所示:

在 $Rt\triangle AOM$ 中, $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (3)^2} = \sqrt{3}$, 在

$Rt\triangle DOM$, $DM = 1$, $OD = \sqrt{OM^2 + DM^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ 故选项 C 正确;

$CD \leq CO + OD = 2\sqrt{3} + 2$, 当且仅当圆心 O 在 CD 上时取等号, 所以 CD 的最大值为 $2\sqrt{3} + 2$ 故 D 错误.

13. 13 因为 $z = 3 + 2i$, 所以 $\bar{z} = 3 - 2i$, 因此 $z \cdot \bar{z} = 3^2 - (2i)^2 = 9 + 4 = 13$.

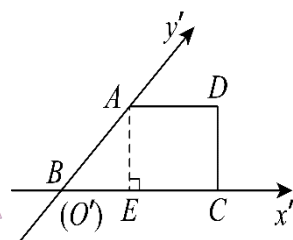
14. $3\sqrt{2}$ 【详解】过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E, 在直观图

中, $\because \angle ABC = 45^\circ$, $AD = DC = 1$, $DC \perp BC$,

所以 $EC = 1$, $BE = 1$, $\therefore BC = 2$,

故原平面图形的上底为 1, 下底 2, 高为 $2\sqrt{2}$,

所以这块菜地的面积为 $S = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,



14 题图

15. $-\frac{1}{2}$ 【详解】由题意可得正方体外接球的直径 $|AB| = \sqrt{3}$, 设点 O 为正方

体外接球的球心, 则 O 为 AB 的中点, $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP}^2 = \overrightarrow{OP}^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

由 $|\overrightarrow{OP}| \geq \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$.

16. 90 【详解】在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ$, 所以 $BC = AB$, 在 $Rt\triangle ABD$,

$\angle ADB = 30^\circ$, 所以 $\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ$, 即 $BD = \sqrt{3}AB$, 在 $\triangle BCD$ 中, $\angle BCD = 120^\circ$,

$CD=90$ ，由余弦定理， $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos 120^\circ$ ，即

$$3AB^2 = AB^2 + 90^2 - 2 \times 90 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)AB, \text{ 解得 } AB=90 \text{ 或 } AB=-45 \text{ (舍去)},$$

即黄河楼 AB 的估计高度为 90 米.

$$17. (1) m = \frac{3}{2}, |z| = 3; (2) \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right).$$

$$(1) z = \frac{3+2mi}{1-i} = \frac{(3+2mi)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+2mi^2+2mi+3i}{1-i^2} = \frac{3-2m}{2} + \frac{3+2m}{2}i \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{若 } z \text{ 是纯虚数, 则 } \begin{cases} 3-2m=0 \\ 3+2m \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m = \frac{3}{2}, \therefore z = 3i, \therefore |z| = 3 \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } z = \frac{3-2m}{2} + \frac{3+2m}{2}i, \bar{z} = \frac{3-2m}{2} - \frac{3+2m}{2}i \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\bar{z} - 2z = \frac{2m-3}{2} - \frac{3(2m+3)}{2}i \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\therefore$ 复数 $\bar{z} - 2z$ 在复平面上对应的点位于第二象限,

$$\therefore \begin{cases} 2m-3 < 0 \\ -3(2m+3) > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m < -\frac{3}{2}, \text{ 即 } m \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$18. (1) 5 \quad (2) -\frac{21}{2}$$

$$\text{【详解】(1) 因为 } \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}, \text{ 所以 } \overrightarrow{EC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}, \text{ 所以 } x = -\frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, \text{ 故}$$

$$2x+9y=5 \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}^2$$

$$\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$\therefore ABCD$ 为平行四边形, $|\overrightarrow{AB}|=6, |\overrightarrow{AD}|=3, \angle BAD=60^\circ,$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6 \times 3 \times \cos 60^\circ = 9, \therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2} \times 6^2 + \frac{1}{6} \times 9 + \frac{2}{3} \times 3^2 = -\frac{21}{2} \dots 12 \text{ 分}$$

$$19. (1) B = \frac{2\pi}{3} \quad (2) \sqrt{2}$$

【详解】(1) $\cos \frac{A+C}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) = \sin \frac{B}{2}$, 所以 $b \sin A = a \sin \frac{B}{2}$,

由正弦定理得: $\sin A \sin B = \sin A \sin \frac{B}{2}$, $\because \sin A \neq 0$, $\therefore \sin \frac{B}{2} = \sin B$,

$$\therefore \sin \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}, \because B \in (0, \pi), \frac{B}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}) \therefore \sin \frac{B}{2} \neq 0, \text{ 得 } \cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 即}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{\pi}{3}, \therefore B = \frac{2\pi}{3} \dots \dots \dots 5 \text{ 分}$$

(2) $\because \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3, \therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 \therefore ac \cos B = -3$, 得 $ac = 6$,

由余弦定理得: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 20$, $a^2 + c^2 = 14$ $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$,

$$\therefore |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}(c^2 + a^2 + 2ac \cos B) = 2 \text{ 所以 } |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2} \dots \dots \dots 12 \text{ 分}$$

$$20. (1) B = \frac{\pi}{3} \quad (2) (8, 12]$$

【详解】由题意得: $\vec{m} = (b-c, a-c)$, $\vec{n} = (\sin B + \sin C, -\sin A)$, 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$

$$\therefore (b-c)(\sin B + \sin C) - \sin A(a-c) = 0, \text{ 根据正弦定理可得 } (b+c)(b-c) = a(a-c),$$

即 $a^2 + c^2 - b^2 = ac \therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$ 又 $\because B \in (0, \pi)$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3} \dots \dots \dots 5 \text{ 分}$$

(2) 若 $b = 4$, 由余弦定理可得: $16 = a^2 + c^2 - 2ac \times \frac{1}{2} = (a+c)^2 - 3ac \therefore ac \leq \frac{(a+c)^2}{4}$

$$\therefore (a+c)^2 - 16 \leq \frac{3(a+c)^2}{4} \therefore (a+c)^2 \leq 64 \therefore 0 < a+c \leq 8, \text{ 当且仅当 } a=c \text{ 时取等号}$$

$$\because a+c > b = 4 \therefore 8 < a+b+c \leq 12 \text{ 所以三角形 } \triangle ABC \text{ 周长的取值范围 } (8, 12] \dots 12 \text{ 分}$$

$$21. (1) 4 \quad (2) \text{ 证明见解析}$$

【详解】(1) 由题可知 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

因为点 E 为 AD 的中点, 所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. $\therefore \overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3m}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{6n}\overrightarrow{AN}$, 因为 M, N, E 三点共线, $\therefore \frac{1}{3m} + \frac{1}{6n} = 1$

$3m + 6n = (3m + 6n)(\frac{1}{3m} + \frac{1}{6n}) = 2 + (\frac{6n}{3m} + \frac{3m}{6n}) \geq 2 + 2 = 4$ 当且仅当 $m = \frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}$

时, 等号成立.6 分

(2) 由 $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 则 $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, 即 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AO} = (\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}) - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{12}\overrightarrow{CB}$, 所以

$\overrightarrow{OE} \parallel \overrightarrow{CB}$, 又 E, C, B 三点不共线, 所以 $OE \parallel BC$12 分

22. (1) $C = \frac{\pi}{3}$; (2) $c = 2\sqrt{6}$

【详解】(1) 由正弦定理得 $\frac{a}{b+c} + \frac{b^2}{ba+cb} = 1$, 即

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} = 1$, 整理得 $a(a+c) + b(b+c) = (a+c)(b+c)$, 化简

得 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$, 由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$, 又 $C \in (0, \pi)$, 则 $C = \frac{\pi}{3}$;

.....4 分

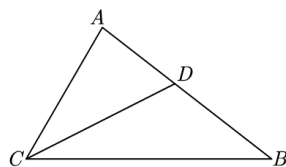
(2) 由面积公式得 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 解得 $ab = 4$ 6 分

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}b \cdot CD \sin 30^\circ + \frac{1}{2}a \cdot CD \sin 30^\circ = \sqrt{3}$ 8 分

即 $\frac{1}{2}CD \cdot \sin 30^\circ (a+b) = \sqrt{3}$, $\therefore a+b = 6$ 10 分

又 $\because ab = 4$, $\therefore c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab = 36 - 12 = 24$,

$c = 2\sqrt{6}$ 12 分



另解：由面积公式得 $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，解得 $ab = 4$ ，又 CD 是 $\angle ACB$

的角平分线，则 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CA \cdot CD \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2} \cdot CB \cdot CD \cdot \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{CA}{CB} = \frac{AD}{BD}$ ，即 $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}$ 6

分 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{CB}$ 8

分

所以 $\overrightarrow{CD}^2 = \left(\frac{a}{a+b} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{CB} \right)^2 = \frac{a^2}{(a+b)^2} \overrightarrow{CA}^2 + \frac{2ab}{(a+b)^2} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{b^2}{(a+b)^2} \overrightarrow{CB}^2$ 10 分

即 $\frac{4}{3} = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} + \frac{2ab}{(a+b)^2} \cdot ab \cdot \frac{1}{2} + \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}$ ，整理得 $\frac{4}{3} = \frac{3a^2 b^2}{(a+b)^2}$ ，又 $ab = 4$ ，解

得 $a+b=6$ ，则 $c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab = 36 - 12 = 24$ ，则 $c = 2\sqrt{6}$...12 分