# 长郡中学2023届模拟试卷(二)

# 数学参考答案

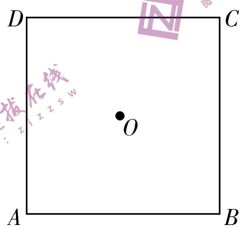
**一、二、选择题**

| 题　号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答　案 | B | C | A | C | C | B | C | B | BCD | BC | BCD | ABD |

1. B　**【解析】**因为 $A=\{x|x^2<2x\}$，$x^2-2x<0$，可得 $0<x<2$，
因为 $B=\{x|\log_2(x-1)<1\}$，$\log_2(x-1)<1$，即 $0<x-1<2$，可得 $1<x<3$，
取交集可得 $A\cap B=\{x|1<x<2\}$，故选 B.

2. C　**【解析】**$z\cdot(1-\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$，则 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，故 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，虚部为 $-\dfrac{3}{2}$，故选 C.

3. A　**【解析】**如图，从 $O,A,B,C,D$ 5 个点中任取 3 个有 $\{O,A,B\}$，$\{O,A,C\}$，$\{O,A,D\}$，$\{O,B,C\}$，$\{O,B,D\}$，$\{O,C,D\}$，$\{A,B,C\}$，$\{A,B,D\}$，$\{A,C,D\}$，$\{B,C,D\}$ 共 10 种不同取法，
3 点共线只有 $\{A,O,C\}$ 与 $\{B,O,D\}$ 共 2 种情况，由古典概型的概率计算公式知，
取到 3 点共线的概率为 $\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$. 故选 A.



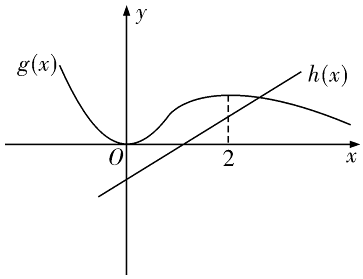

4. C　**【解析】**易得 $R=3$，球的表面积为 $4\pi R^2=36\pi$，故选 C.

5. C　**【解析】**由 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=A_5A_6=A_6A_7=A_7A_8=\cdots=2$，
可得 $OA_2=2\sqrt{2}$，$OA_3=2\sqrt{3}$，$\cdots$，$OA_n=2\sqrt{n}$，
所以 $a_n=OA_n+OA_{n+1}+A_nA_{n+1}=2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}+2$，所以 $b_n=\dfrac{2}{a_n-2}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，
所以数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$，
所以 $S_{120}=\sqrt{120+1}-1=10$，故选 C.

6. B　**【解析】**由题意可得 $x=2\pi$ 时，$f(x)$ 取得最大值，可得 $\omega=\dfrac{1}{6}+k$，$k\in\mathbf{Z}$. 根据单调性可得 $\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant\dfrac{T}{2}$，故 $0<\omega\leqslant2$，所以 $k=0$ 时，$\omega=\dfrac{1}{6}$；$k=1$ 时，$\omega=\dfrac{7}{6}$. 又 $\omega=\dfrac{7}{6}$ 时，当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时，$\dfrac{7}{6}x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{36},\dfrac{5\pi}{9}\right]$，此时 $f(x)$ 不单调，故 $\omega=\dfrac{1}{6}$. 故选 B.

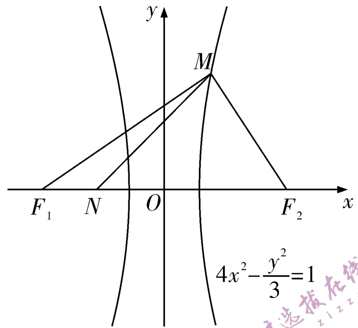
7. C　**【解析】**函数 $f(x)=(mx-1)\mathrm{e}^x-x^2$，不等式 $f(x)<0$ 化为 $mx-1<\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$.
分别令 $h(x)=mx-1$，$g(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$. $g'(x)=\dfrac{x(2-x)}{\mathrm{e}^x}$.
可得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.
$g(0)=0$，$g(2)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$，如图所示.
$\because$ 不等式 $f(x)<0$ 的解集中恰有两个不同的正整数解，$\therefore$ 正整数解为 1，2，
$\therefore\begin{cases}h(2)<g(2),\\h(3)\geqslant g(3),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m-1<\dfrac{4}{\mathrm{e}^2},\\3m-1\geqslant\dfrac{9}{\mathrm{e}^3},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{3}{\mathrm{e}^3}+\dfrac{1}{3}\leqslant m<\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}+\dfrac{1}{2}$.

∴实数 $m$ 的取值范围是$\left[\frac{3}{e^3}+\frac{1}{3},\frac{2}{e^2}+\frac{1}{2}\right)$. 故选 C.




8. B 【解析】∵$|F_1M|-|F_2M|=2a=1$,$|F_1M|^2+|F_2M|^2=|F_1F_2|^2=13$,

∴$|F_1M|=3$,$|F_2M|=2$,




将$\triangle MF_1F_2$ 沿 $MN$ 折成直二面角 $F_1-MN-F_2$,过 $F_1$ 作 $F_1H\perp MN$,易知 $F_1H\perp$平面 $HMF_2$,

设$\angle HMF_1=\alpha$,在 $\mathrm{Rt}\triangle MHF_1$ 中有 $HF_1=3\sin\alpha$,$MH=3\cos\alpha$,

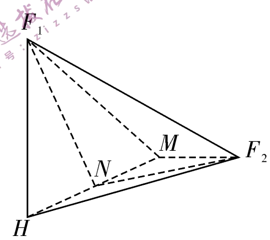
∴在$\triangle MHF_2$ 中,$\angle HMF_2=\frac{\pi}{2}-\alpha$,有 $HF_2^2=MF_2^2+MH^2-2MF_2\cdot MH\cos\angle HMF_2$,

∴$HF_2^2=4+9\cos^2\alpha-12\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=4+9\cos^2\alpha-6\sin 2\alpha$,

∴$F_1F_2^2=HF_2^2+HF_1^2=4+9\cos^2\alpha-6\sin 2\alpha+9\sin^2\alpha=13-6\sin 2\alpha\geqslant 7$,

当且仅当 $\sin 2\alpha=1$,$\alpha=\frac{\pi}{4}$时等号成立.

∴$F_1$,$F_2$ 距离最小时,$MN$ 为角平分线,故$\frac{F_1N}{NF_2}=\frac{F_1M}{F_2M}=\frac{3}{2}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$,可得 $\lambda=\frac{3}{5}$. 故选 B.




9. BCD 【解析】由题 $0<a<b<c$,所以有 $c-a>b-a>0$,$\frac{1}{c-a}<\frac{1}{b-a}$,故 A 错误;

$\frac{b}{a}>\frac{b+c}{a+c}\Leftrightarrow b(a+c)>a(b+c)\Leftrightarrow bc>ac\Leftrightarrow b>a$,故 B 正确;

$\frac{1}{a(c-a)}>\frac{1}{b(c-a)}\Leftrightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Leftrightarrow b>a$,故 C 正确;

$ab+c^2>ac+bc\Leftrightarrow c(c-b)-a(c-b)>0\Leftrightarrow(c-a)(c-b)>0$,故 D 正确. 故选 BCD.

10. BC 【解析】因为函数 $f(x)$是奇函数,$f(x+2)=f(-x)$,所以 $f(x+2)=f(-x)=-f(x)$,

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,即 $f(x+4)=f(x)$,故 $f(x)$的周期为 4,

所以 $f'(x+4)=f'(x)$,故 $f'(x)$的一个周期为 4,故 B 项正确;

$f(2023)=f(4\times 505+3)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-2$,故 A 项错误;

因为函数 $f(x)$是奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,

所以$-f'(-x)=-f'(x)$,即 $f'(-x)=f'(x)$,所以 $f'(x)$为偶函数,故 C 项正确;

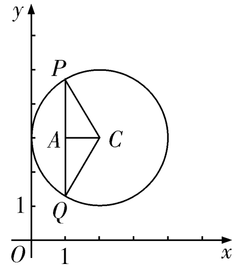
因为 $f(x+2)=f(-x)$，所以 $f'(x+2)=-f'(-x)$，

令 $x=-1$，可得 $f'(1)=-f'(1)$，解得 $f'(1)=0$，故 D 项错误．故选 BC．

11．BCD 【解析】圆 $C$：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 的圆心为 $C(2,3)$，半径为 2，

又 $A(1,3)$ 满足 $(1-2)^2+(3-3)^2=1<4$，所以 $A(1,3)$ 在圆 $C$ 内，

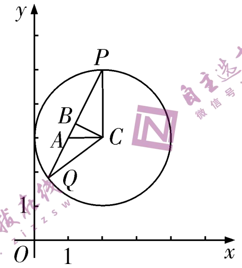
所以，当 $AC\perp PQ$ 时，$|PQ|$ 取得最小值，如下图所示，




此时 $|AC|=1$，$|PQ|=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$，所以 A 选项错误；

设 $B$ 是 $PQ$ 的中点，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}\cdot(2\overrightarrow{PB})=2|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\cos\angle P=2|\overrightarrow{PB}|^2=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}|^2}{2}$，

由于 $2\sqrt{3}\leqslant|\overrightarrow{PQ}|\leqslant4$，$12\leqslant|\overrightarrow{PQ}|^2\leqslant16$，所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}|^2}{2}\in[6,8]$，B 选项正确；




$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|\cdot\cos\angle PCQ=|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|\cdot\dfrac{|\overrightarrow{CP}|^2+|\overrightarrow{CQ}|^2-|PQ|^2}{2|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|}=\dfrac{8-|PQ|^2}{2}$，

由于 $12\leqslant|\overrightarrow{PQ}|^2\leqslant16$，$-8\leqslant8-|\overrightarrow{PQ}|^2\leqslant-4$，所以 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=\dfrac{8-|PQ|^2}{2}\in[-4,-2]$，

所以 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的最大值为 $-2$，C 选项正确，D 选项正确．故选 BCD．

12．ABD 【解析】因为函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}=\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\dfrac{\sin 7x}{7}$，定义域为 $\mathbf{R}$，

对于 A，$f(\pi+x)=\sin(\pi+x)+\dfrac{\sin(3\pi+3x)}{3}+\dfrac{\sin(5\pi+5x)}{5}+\dfrac{\sin(7\pi+7x)}{7}$

$=-\sin x-\dfrac{\sin 3x}{3}-\dfrac{\sin 5x}{5}-\dfrac{\sin 7x}{7}=\sin(-x)+\dfrac{\sin(-3x)}{3}+\dfrac{\sin(-5x)}{5}+\dfrac{\sin(-7x)}{7}=f(-x)$，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，故 A 正确；

对于 B，$f(-x)=\sin(-x)+\dfrac{\sin(-3x)}{3}+\dfrac{\sin(-5x)}{5}+\dfrac{\sin(-7x)}{7}$

$=-\sin x-\dfrac{\sin 3x}{3}-\dfrac{\sin 5x}{5}-\dfrac{\sin 7x}{7}=-f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于点 $(0,0)$ 对称，故 B 正确；

对于 C，由题知 $f(x+\pi)=-f(x)\neq f(x)$，故 C 错误；

对于 D，由题可知 $f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x\leqslant4$，故 D 正确．故选 ABD．

## 三、填空题

13．1 【解析】由题设可得 $2^n=64$，则 $n=6$；

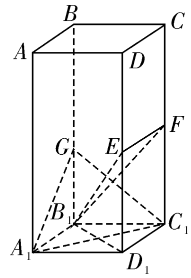
展开式的通项公式是 $T_{r+1}=C_6^r2^{6-r}x^{\frac{1}{2}(6-r)}\left(-ax^{-\frac{1}{2}}\right)^r=(-a)^r2^{6-r}C_6^rx^{3-r}$，$r=0,1,2\cdots,6$，

令 $3-r=0$ 可得 $r=3$，

由题意 $(-a)^32^{6-3}C_6^3=-160$，即 $a^3C_6^3=20$，即 $a^3=1\Rightarrow a=1$．

14. $6x-y-16=0$ 【解析】$f'(x)=3x^2-f'(2)$，则 $f'(2)=12-f'(2)$，$f'(2)=6$，所以 $f(2)=2^3-2\times6=-4$，故函数 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-(-4)=6(x-2)$，即 $6x-y-16=0$.

15. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ 【解析】如图，连接 $B_1D_1$，$A_1C_1$，由题可知，$A_1C_1\perp B_1D_1$，$ED_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$.




因为 $A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $ED_1\perp A_1C_1$.

又 $B_1D_1\subset$ 平面 $EB_1D_1$，$ED_1\subset$ 平面 $EB_1D_1$，$ED_1\cap B_1D_1=D_1$，则 $A_1C_1\perp$ 平面 $EB_1D_1$.

又 $B_1E\subset$ 平面 $EB_1D_1$，则 $C_1A_1\perp B_1E$.

如图，过 $E$ 做 $D_1C_1$ 的平行线，交 $CC_1$ 于 $F$，则 $F$ 为 $CC_1$ 的中点，连接 $B_1F$，过 $C_1$ 做 $B_1F$ 的垂线，交 $BB_1$ 于 $G$.

由题可得，$D_1C_1\perp$ 平面 $BCC_1B_1$，又 $EF\parallel D_1C_1$，则 $EF\perp$ 平面 $BCC_1B_1$.

因为 $C_1G\subset$ 平面 $BCC_1B_1$，则 $C_1G\perp EF$，

又 $B_1F\subset$ 平面 $B_1FE$，$FE\subset$ 平面 $B_1FE$，$FE\cap B_1F=F$，则 $C_1G\perp$ 平面 $B_1FE$.

因为 $B_1E\subset$ 平面 $B_1FE$，则 $C_1G\perp B_1E$，

因为 $C_1G\subset$ 平面 $C_1GA_1$，$C_1A_1\subset$ 平面 $C_1GA_1$，$C_1A_1\cap C_1G=C_1$，则 $B_1E\perp$ 平面 $C_1GA_1$.

连接 $A_1G$，则点 $P$ 的轨迹为平面 $C_1GA_1$ 与四棱柱的交线，即 $\triangle A_1C_1G$.

注意到 $\angle B_1C_1G+\angle GC_1F=\angle GC_1F+\angle B_1FC_1\Rightarrow\angle B_1C_1G=\angle B_1FC_1$，$\angle C_1B_1G=\angle FC_1B_1$，

则 $\triangle C_1B_1G\backsim\triangle FC_1B_1$，故 $\dfrac{C_1B_1}{B_1G}=\dfrac{FC_1}{C_1B_1}=2\Rightarrow B_1G=\dfrac{1}{2}$.

则点 $P$ 的轨迹的长度为 $A_1G+C_1G+A_1C_1=2\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}+\sqrt{2}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

16. (1)2697 (2)$a-1$(第一空 3 分，第二空 2 分)

【解析】(1)由题意，$F_1\div4=1\div4=0\cdots\cdots1$，则 $a_1=1$，$F_2\div4=1\div4=0\cdots\cdots1$，则 $a_2=1$，

由 $F_3=F_1+F_2$，则 $F_3$ 除以 4 的余数为 $(1+1)\div4=0\cdots\cdots2$，即 $a_3=2$，

由 $F_4=F_2+F_3$，则 $F_4$ 除以 4 的余数为 $(1+2)\div4=0\cdots\cdots3$，即 $a_4=3$，

由 $F_5=F_3+F_4$，则 $F_5$ 除以 4 的余数为 $(3+2)\div4=1\cdots\cdots1$，即 $a_5=1$，

由 $F_6=F_4+F_5$，则 $F_6$ 除以 4 的余数为 $(3+1)\div4=1\cdots\cdots0$，即 $a_6=0$，

由 $F_7=F_5+F_6$，则 $F_7$ 除以 4 的余数为 $(0+1)\div4=0\cdots\cdots1$，即 $a_7=1$，

由 $F_8=F_6+F_7$，则 $F_8$ 除以 4 的余数为 $(0+1)\div4=0\cdots\cdots1$，即 $a_8=1$，

故由斐波那契数 $F_n$ 除以 4 的余数按原顺序构成的数列 $\{a_n\}$，是以 6 为最小正周期的数列，

因为 $2023\div6=337\cdots\cdots1$，所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2023}=8\times337+1=2697$；

(2)由斐波那契数 $F_n$ 的递推关系可知：$n>2$ 时 $F_{n-2}=F_n-F_{n-1}$，且 $F_1=F_2=1$，$F_{2024}=a$，

所以 $F_1+F_2+\cdots+F_{2022}=(F_3-F_2)+(F_4-F_3)+\cdots+(F_{2024}-F_{2023})=F_{2024}-F_2=a-1$.

## 四、解答题

17.【解析】(1)由已知有 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{2^n}$，$\therefore b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2^n}$.

利用累差迭加即可求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式：$b_n=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $a_n=2n-\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

$\therefore S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2k-\dfrac{k}{2^{k-1}}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^{k-1}}$，

而 $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1)$，又 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^{k-1}}$ 是一个典型的错位相减法模型，

易得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^{k-1}}=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$，$\therefore S_n=n(n+1)+\dfrac{n+2}{2^{n-1}}-4$. ………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-2\cos^2x+\sqrt{3}\sin 2x=-1-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$，

由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故最小正周期为 $\pi$.

由 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$\therefore x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},-1\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. …………………………………………………… 6 分

(2)由于 $f\left(\frac{1}{2}A+\frac{\pi}{12}\right)+1=2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)-1+1=2\sin A$，

故 $2\sin A=\frac{\sqrt{7}}{3}b\sin C$，于是 $2a=\frac{\sqrt{7}}{3}bc$，又 $a=\sqrt{7}$，解得 $bc=6$.

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又角 $A$ 为锐角，故 $A=\frac{\pi}{3}$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，则 $7=b^2+c^2-12\cdot\frac{1}{2}$，

化简得：$b^2+c^2=13$，$\therefore (b+c)^2-2bc=13$，$\therefore b+c=5$，

$\therefore$三角形$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=5+\sqrt{7}$. …………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，取 $AC$ 的中点 $D$，连接 $BD$，

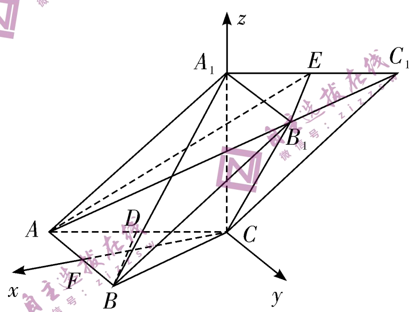
因为$\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $BD\perp AC$，又 $BD\subset$平面 $ABC$，

平面 $AA_1C_1C\perp$平面 $ABC$，平面 $AA_1C_1C\cap$平面 $ABC=AC$，则 $BD\perp$平面 $AA_1C_1C$，

而 $A_1C\subset$平面 $AA_1C_1C$，于是 $BD\perp A_1C$，又 $A_1C\perp BC$，$BD\cap BC=B$，$BC\subset$平面 $ABC$，

因此 $A_1C\perp$平面 $ABC$，又 $AC\subset$平面 $ABC$，则 $A_1C\perp AC$，

于是 $AA_1=\sqrt{A_1C^2+AC^2}=\sqrt{A_1C^2+BC^2}=A_1B$，所以 $A_1A=A_1B$. …………………………………………… 6 分




(2)取 $AB$ 的中点 $F$，连接 $CF$. 由(1)得 $A_1C\perp$平面 $ABC$，

又 $B_1B/\!/A_1A$，所以$\angle A_1AC$ 是直线 $B_1B$ 与平面 $ABC$ 所成的角，即$\angle A_1AC=45^\circ$，$A_1C=AC=2$，

由(1)知 $A_1C$，$CF$，$AB$ 两两互相垂直，以 $C$ 为坐标原点，直线 $CF$ 为 $x$ 轴，过点 $C$ 且平行于 $AB$ 的直线为 $y$ 轴，直线 $CA_1$ 为 $z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},-1,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B_1(0,2,2)$，$C_1(-\sqrt{3},1,2)$，$E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2\right)$，

于是$\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{3},3,2)$，$\overrightarrow{EB_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,2,2)$，

设平面 $AB_1E$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+3y_1+2z_1=0,\\ \sqrt{3}x_1+3y_1=0,\end{cases}$令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,3)$，

设直线 $B_1C$ 与平面 $AB_1E$ 所成的角为 $\theta$，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CB_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CB_1}|}=\frac{4}{\sqrt{13}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$，

即直线 $B_1C$ 与平面 $AB_1E$ 所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{26}}{13}$. ……………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)因为点 $Q$ 为线段 $FT$ 的垂直平分线与半径 $ET$ 的交点，

所以 $|QT|=|QF|$，所以 $|QE|+|QF|=|QE|+|QT|=|ET|=4>2\sqrt{2}=|EF|$，

所以点 $Q$ 的轨迹是以 $E,F$ 为焦点，长轴长为 4 的椭圆，在椭圆中 $a=2,c=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$，

所以曲线 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)由已知得 $k_{AH}=-\frac{1}{2}$，所以直线 $AH$ 的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)$，所以 $S$ 点的坐标为 $(0,1)$.

当直线 $l$ 的斜率不存在时，$S_{\triangle ASM}=\sqrt{2}-1$，$S_{\triangle HSN}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}$，或 $S_{\triangle ASM}=\sqrt{2}+1$，$S_{\triangle HSN}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ 都与已知不符；

…………………………………………………………………………………………………………………… 6 分

当直线 $l$ 的斜率存在时，设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kx-2=0$，

$x_1+x_2=\frac{-4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{-2}{1+2k^2}$， …………………………………………………………………… 7 分

$S_{\triangle ASM}=\frac{1}{2}|AS|\cdot|MS|\sin\angle ASM$，$S_{\triangle HSN}=\frac{1}{2}|HS|\cdot|NS|\sin\angle HSN$，

由 $\triangle ASM$ 的面积是 $\triangle HSN$ 面积的 $\frac{3}{2}$ 倍可得 $2S_{\triangle ASM}=3S_{\triangle HSN}$，

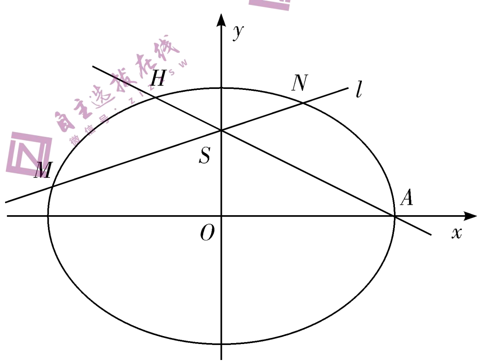
化简得 $2|AS|\cdot|MS|=3|HS|\cdot|NS|$，即 $2\frac{|AS|}{|HS|}=3\frac{|NS|}{|MS|}$， ……………………………………… 9 分

又 $\frac{|AS|}{|HS|}=\frac{x_A}{-x_H}=3$，所以 $\frac{|NS|}{|MS|}=2$，即 $\frac{x_2}{-x_1}=2$，也就是 $x_2=-2x_1$， ……………………………… 10 分

所以 $-x_1=\frac{-4k}{1+2k^2}$，$x_1=\frac{4k}{1+2k^2}$，$x_2=\frac{-8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{-32k^2}{(1+2k^2)^2}=\frac{-2}{1+2k^2}$，

解得 $k^2=\frac{1}{14}$，

所以直线 $l$ 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{14}}{14}x+1$. ………………………………………………………………………… 12 分




21.【解析】(1)(i)依题意得 $2\times2$ 列联表如下：

| | 正确识别 | 错误识别 | 合计 |
|---|---|---|---|
| $A$ 组软件 | 40 | 20 | 60 |
| $B$ 组软件 | 20 | 20 | 40 |
| 合计 | 60 | 40 | 100 |

零假设为 $H_0$：识别音乐是否正确与两种软件类型无关.

根据列联表得 $\chi^2=\frac{100(40\times20-20\times20)^2}{60\times40\times60\times40}=\frac{25}{9}\approx2.778<3.841=x_{0.05}$，

所以根据小概率 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，没有充分证据推断 $H_0$ 不成立，因此可以认为 $H_0$ 成立，即认为识别音乐是否正确与两种软件类型无关. ……………………………………………………………………………… 3 分

(ii)由(i)得 $P_1=\frac{2}{3}, P_2=\frac{1}{2}$,

故方案二在一次测试中通过的概率为

$P=C_2^1\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot C_2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+C_2^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{9}$. ………………… 6 分

(2)方案二每次测试通过的概率为

$P=C_2^1\cdot P_1(1-P_1)\cdot C_2^2\cdot(P_2)^2+C_2^2(P_1)^2\cdot C_2^1\cdot P_2(1-P_2)+C_2^2(P_1)^2\cdot C_2^2(P_2)^2$

$=P_1P_2\left(\frac{8}{3}-3P_1P_2\right)=-3(P_1P_2)^2+\frac{8}{3}P_1P_2=-3\left(P_1P_2-\frac{4}{9}\right)^2+\frac{16}{27}$,

所以当 $P_1P_2=\frac{4}{9}$ 时,$P$ 取到最大值 $\frac{16}{27}$,又 $P_1+P_2=\frac{4}{3}$,此时 $P_1=P_2=\frac{2}{3}$, ………………… 9 分

因为每次测试都是独立事件,故 $n$ 次实验测试通过的次数 $X\sim B(n,P)$,期望值 $E(X)=nP=16$,

因为 $P\leqslant\frac{16}{27}$,所以 $n=\frac{16}{P}\geqslant16\times\frac{27}{16}=27$,所以测试至少 27 次,此时 $P_1=P_2=\frac{2}{3}$. ………………… 12 分

22.【解析】(1)由题意 $f'(x)=\dfrac{1-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$,$x\in(0,\pi)$,

令 $f'(x)=0$,则 $x=\frac{\pi}{2}$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $f'(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时 $f'(x)>0$.

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$. ………………… 5 分

(2)由 $xf(x)\geqslant\frac{g(x)}{e^x}\Leftrightarrow x(\cos x-1)e^{-x}\geqslant e^{-x}[ax^2+(1-e^x)x]$,

所以 $x\cos x-x\geqslant ax^2+(1-e^x)x\Leftrightarrow x(e^x+\cos x-ax-2)\geqslant0$,

记 $h(x)=e^x+\cos x-ax-2$,即 $xh(x)\geqslant0$ 恒成立,且 $h'(x)=e^x-\sin x-a$,

当 $a>1$ 时,若 $x\in[0,+\infty)$,令 $k(x)=h'(x)$,则 $k'(x)=e^x-\cos x\geqslant0$,

所以 $k(x)=h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增,且 $h'(0)=1-a<0$,

$h'(1+a)=e^{1+a}-\sin(1+a)-a\geqslant e^{1+a}-1-a>0$,

(令 $y=e^x-x-1$ 且 $x>0$,则 $y'=e^x-1>0$,故 $y$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增,则 $y>y|_{x=0}=0$,

所以 $e^x-x-1>0$,以上 $e^{1+a}-(1+a)>0$ 成立),

故存在唯一 $x_0\in(0,+\infty)$,使得 $h'(x_0)=0$,

故 $x\in(0,x_0)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 递减,所以 $h(x)<h(0)=0$,此时 $xh(x)<0$,不合题意.

当 $a\leqslant1$ 时,(ⅰ)若 $x>0$,由上知 $h'(x)>1+x-\sin x-a>1-a\geqslant0$,则 $h(x)$ 递增,

(令 $y=x-\sin x$ 且 $x>0$,则 $y'=1-\cos x\geqslant0$,故 $y$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增,则 $y>y|_{x=0}=0$,

所以 $x-\sin x>0$,以上 $1+x-\sin x-a>1-a$ 成立),

所以 $h(x)>h(0)=0$ 恒成立,即 $xh(x)>0$ 成立,符合题意.

(ⅱ)$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$,令 $t(x)=k'(x)$,则 $t'(x)=e^x+\sin x$ 单调递增,

$t'(0)=1$,$t'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$,所以存在唯一 $x_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 使 $t'(x_1)=0$,

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},x_1\right)$ 时,$t'(x)<0$,$t(x)$ 递减,当 $x\in(x_1,0)$ 时,$t'(x)>0$,$t(x)$ 递增,

又 $t\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$,$t(0)=0$,故存在唯一 $x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 使 $t(x_2)=k'(x_2)=0$,

故 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},x_2\right)$ 时,$t(x)=k'(x)>0$,$k(x)=h'(x)$ 递增,$x\in(x_2,0)$ 时,$t(x)=k'(x)<0$,

$k(x)=h'(x)$ 递减,又 $k\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}+1-a>0$,$k(0)=1-a\geqslant0$,

所以 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时,$k(x)=h'(x)\geqslant0$,则 $h(x)$ 递增,故 $h(x)\leqslant h(0)=0$,即 $xh(x)\geqslant0$ 恒成立.

综上,$a\leqslant1$. ………………… 12 分