

2023 届高三一轮复习联考(二)

数学试题

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \mid x - 2 \leq 0\}$ , 集合  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ , 集合  $C = \{x \mid -1 < x < 1\}$ , 则  $(A \cap B) \cup C =$   
 A.  $(-1, 1]$       B.  $(-1, 1] \cup \{2\}$       C.  $(-1, 2]$       D.  $\{0\}$
2. 已知复数  $z$  满足  $(1+i)z = 2-i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则在复平面内  $z$  对应的点位于  
 A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. 已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  均为公差不为 0 的等差数列, 且满足  $a_3 = b_2, a_5 = b_4$ , 则  $\frac{a_1 - a_1}{b_3 - b_2} =$   
 A. 2      B. 1      C.  $\frac{3}{2}$       D. 3
4. 关于  $x$  的不等式  $ax^2 + 2ax + 1 > 0$  恒成立的一个充分不必要条件是  
 A.  $0 \leq a \leq 1$       B.  $0 \leq a < 1$       C.  $0 < a \leq 1$       D.  $0 < a < 1$
5. 已知指数函数  $y = f(x)$  的图象与直线  $y = x$  相切于点  $P$ , 则  $f(x)$  的解析式可能是  
 A.  $y = e^x$       B.  $y = (\sqrt{2})^x$       C.  $y = e^{\frac{x}{2}}$       D.  $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$
6. 记  $S_n$  为各项均为正数的等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $S_3 = \frac{7}{8}, a_3 = \frac{1}{2}$ , 则  $a_5 =$   
 A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{8}$       C. 1      D. 2
7. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $F$  为  $AB$  的中点,  $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}, BE$  与  $CF$  交于点  $P$ , 且满足  $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BE}$ , 则  $\lambda$  的值为  
 A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{4}{7}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{2}{3}$

8. 设  $a = \ln \frac{2\ 023}{2\ 022}$ ,  $b = \frac{1}{2\ 022}$ ,  $c = \log_2 \frac{1}{2\ 023}$ , 则

A.  $a < c < b$

B.  $c < b < a$

C.  $b < c < a$

D.  $c < a < b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知  $\alpha > 0$ , 且  $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 则下列选项中一定大于  $\sin \alpha$  的是

A.  $\alpha$

B.  $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2(1 - \sin \alpha)}$

C.  $\tan \alpha$

D.  $1 - \cos^2 \alpha$

10. 已知平面向量  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ,  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2$ , 则  $3|\mathbf{a}| + 2|\mathbf{b}|$  的可能值为

A. 3

B. 4

C.  $4\sqrt{3}$

D.  $6\sqrt{2}$

11. 已知  $y = f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数, 若  $y = f(2x+1)$  的最小正周期为 1, 则下列说法正确的是

A.  $f(0) = 0$

B. 1 是  $f(x)$  的一个周期

C.  $f(1) = f(-1) = 0$

D.  $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

12. 如果一个人爬楼梯的方式有两种, 一次上 1 个台阶或 2 个台阶, 设爬上第  $n$  个台阶的方法数为  $a_n$ , 则下列结论正确的是

A.  $a_5 = 13$

B.  $3a_n = a_{n-2} + a_{n+2}$

C.  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = 51$

D.  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1} - 1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若单位向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{3}$ , 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为 \_\_\_\_\_.

14. 若  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象向右平移  $\varphi$  ( $\varphi > 0$ ) 个单位长度得到  $y = \cos 2x$  的图象, 则  $\varphi$  的值可以是 \_\_\_\_\_, (写出满足条件的一个值即可)

15. 已知  $x > 0, y > 0$  且  $\frac{x}{3x+2} + \frac{y}{2y+1} = \frac{1}{6}$ , 则  $x+2y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

16. 已知关于  $x$  的方程  $(\ln x)^2 - 3ax \ln x + 2a^2 x^2 = 0$  有 4 个实数根, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)已知数列  $\{a_n\}$  满足,  $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数时,} \\ a_n - 2, n \text{ 为偶数时,} \end{cases} a_1 = 1.$

(1)若数列  $\{b_n\}$  为数列  $\{a_n\}$  的奇数项组成的数列,  $\{c_n\}$  为数列  $\{a_n\}$  的偶数项组成的数列, 求出  $c_1, c_2, c_3$ , 并证明: 数列  $\{b_n\}$  为等差数列;

(2)求数列  $\{a_n\}$  的前 22 项和.

18.(12 分)已知向量  $a = (2\sin x, \cos x - \sin x)$ ,  $b = (\cos x, \sqrt{3}(\cos x + \sin x))$ , 函数  $f(x) = a \cdot b + 4.$

(1)求函数  $y = f(x)$  的值域;

(2)函数  $y = f(x)$  在  $x \in [0, m]$  上有 10 个零点, 求  $m$  的取值范围.

19.(12 分)已知函数  $f(x) = x(\ln x - a)$ ,

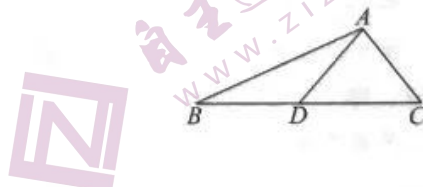
(1)当  $a = 2$  时, 求函数  $y = f(x)$  的极值点;

(2)当  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq -\ln x - 2$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

20.(12分)如图,  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  为边  $BC$  上一点, 且满足  $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$ .

(1) 证明:  $\angle BAC + \angle DAC = \pi$ ;

(2) 若  $AB=2, AC=1, BC=\sqrt{7}$ , 求  $\triangle ABD$  的面积.



21.(12分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n, a_1=2$ , 当  $n \geq 2$  时,  $2(n-1)S_n = 2nS_{n-1} + n^2 - n$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求证:  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{2}{3}$ .

22.(12分) 已知函数  $f(x) = 2x + \frac{a}{e^{2x}}$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 求证:  $x_1 x_2 < 1$ .

2023 届高三一轮复习联考(二)

数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】 $A = \{x | x \leq 2\}$ , 所以  $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ , 所以  $(A \cap B) \cup C = (-1, 1] \cup \{2\}$ . 故选 B.

2.A 【解析】 $z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ ,  $\therefore z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ , 故在复平面内  $z$  对应的点为  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ , 位于第一象限. 故选 A.

3.A 【解析】设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的公差分别为  $d_1, d_2$ , 由  $a_3 = b_2, a_6 = b_4$ , 两式作差得  $a_4 - a_3 = b_4 - b_3$ , 即  $3d_1 = 2d_2$ ,

所以  $\frac{a_4 - a_1}{b_3 - b_2} = \frac{3d_1}{d_2} = \frac{2d_2}{d_2} = 2$ . 故选 A. 来源微信公众号: 高三答案

4.D 【解析】当  $a = 0$  时, 该不等式成立; 当  $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4a^2 - 4a < 0, \end{cases}$  即  $0 < a < 1$  时, 该不等式成立, 综上可得当  $0 \leq a < 1$  时, 关于  $x$  的不等式

$ax^2 + 2ax + 1 > 0$  恒成立, 所以关于  $x$  的不等式  $ax^2 + 2ax + 1 > 0$  恒成立的一个充分不必要条件是  $0 < a < 1$ . 故选 D.

5.C 【解析】由题意, 设  $f(x) = a^x$ , 切点  $P(x_0, a^{x_0})$ , 则  $a^{x_0} = x_0, f'(x) = a^x \ln a$ , 则  $\begin{cases} a^{x_0} \ln a = 1, \\ a^{x_0} = x_0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x_0 = e, \\ a = e^{\frac{1}{e}}. \end{cases}$  所以  $f(x) = e^{\frac{x}{e}}$ . 故

选 C.

6.D 【解析】由题意,  $\begin{cases} S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{7}{8}, \\ a_3 = a_1q^2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$  两式相除得  $\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = \frac{7}{4}$ , 化简得  $3q^2 - 4q - 4 = 0$ , 解得  $q = 2$  或  $q = -\frac{2}{3}$  (舍),

$\therefore a_1 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$ . 故选 D.

7.C 【解析】由题可知,  $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$ ,  $\therefore \overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\lambda \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\lambda \overrightarrow{BF}$ ,

$\therefore C, P, F$  三点共线,  $\therefore \frac{2}{3}\lambda + \frac{2}{3}\lambda = 1$ , 解得  $\lambda = \frac{3}{4}$ . 故选 C.

8.D 【解析】令  $t = \frac{2023}{2022} > 1$ , 则  $a = \ln t, b = t - 1$ , 设  $f(t) = t - 1 - \ln t$ , 则  $f'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$ . 当  $t > 1$  时,  $f'(t) > 0$ , 所以  $f(t)$  在

$(1, +\infty)$  上单调递增, 故  $f(t) > f(1) = 0$ , 即  $b > a$ ; 又因为  $a = \ln \frac{2023}{2022} > 0, c = \log_2 \frac{1}{2023} < 0$ , 所以  $c < a$ , 综上  $c < a < b$ . 故选 D.

9.AB 【解析】设  $f(x) = x - \sin x$ , 则  $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ,  $\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故当  $x > 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ , 即  $f(x) > 0$ ,

所以  $a > \sin a$ , 故 A 正确;  $\frac{\cos 2a + 1}{2(1 - \sin a)} = \frac{2\cos^2 a}{2(1 - \sin a)} = \frac{1 - \sin^2 a}{1 - \sin a} = 1 + \sin a > \sin a$ , 故 B 正确; 当  $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $\tan a < 0 < \sin a$ , 故

C 错误;  $1 - \cos^2 a = \sin^2 a$ , 当  $a = \pi$  时,  $\sin^2 a = 0 = \sin a$ , 故 D 错误, 故选 AB.

10.BC 【解析】 $\because |a - b| = 2, a \cdot b = 0, \therefore |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 4$ , 设  $|a| = 2\sin \alpha, |b| = 2\cos \alpha, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

则  $3|a| + 2|b| = 6\sin \alpha + 4\cos \alpha = 2\sqrt{13}\sin(\alpha + \varphi), \sin \varphi = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \varphi = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ ,

$\therefore \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \therefore \alpha + \varphi \in [\varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi]$ , 则  $\sin(\alpha + \varphi) \in [\frac{2\sqrt{13}}{13}, 1]$ ,  $\therefore 3|a| + 2|b| \in [4, 2\sqrt{13}]$ , 故选 BC.

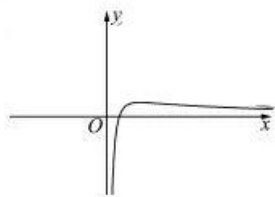
11.ACD 【解析】 $y = f(2x+1)$  的最小正周期为 1, 则  $f(2(x+1)+1) = f(2x+1)$ , 即  $f(2x+3) = f(2x+1)$ , 所以  $y = f(x)$  的最小正周期为 2, 故 B 错误;  $y = f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数, 所以  $f(0) = 0, f(1) = -f(-1)$ , 又因为 2 是  $f(x)$  的一个周期, 所以

$f(1) = f(-1)$ , 从而  $f(1) = f(-1) = 0$ , 故 A, C 正确; 同理  $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2}) = f(\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2}) = 0$ , 故 D 正确, 故选 ACD.

12.ABD 【解析】根据题意可得  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13$ , 所以 A 正确;  $a_7 = 21$ , 则  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = 53$ , 则 C 不正确;  $3a_n = a_n + a_n + a_n = a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n+1} - a_{n-1} + a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n-2} + a_{n+2}$ , 所以 B 正确;

$a_1^2 = 1$ ,

- $a_1^2 = a_2 \cdot (a_3 - a_1) = a_2 \cdot a_3 - a_2 \cdot a_1$ ,  
 $a_2^2 = a_3 \cdot (a_4 - a_2) = a_3 \cdot a_4 - a_3 \cdot a_2$ ,  
 $\dots$   
 $a_n^2 = a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) = a_n \cdot a_{n+1} - a_n \cdot a_{n-1}$ .  
 累加可得  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1} - 1$ , 所以 D 正确, 故选 ABD.
13.  $\frac{2\pi}{3}$  【解析】设  $a$  与  $b$  的夹角为  $\theta$ ,  $\therefore |a+2b| = \sqrt{3}$ ,  $\therefore |a+2b|^2 = 1+4+2 \times 2 \cos \theta = 3$ ,  $\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore \theta \in [0, \pi]$ ,  $\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$ .
14.  $\frac{\pi}{6}$  (答案不唯一) 【解析】 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象向右平移  $\varphi$  ( $\varphi > 0$ ) 个单位得到  $y = \cos\left[2\left(x - \varphi\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3} - 2\varphi\right)$ ,  
 所以  $\frac{\pi}{3} - 2\varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 解得  $\varphi = \frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 所以  $\varphi$  的值可以是  $\frac{\pi}{6}$  (答案不唯一).
15.  $\frac{5}{12}$  【解析】 $\frac{x}{3x+2} + \frac{y}{2y+1} = \frac{1}{6}$ , 可整理得  $\frac{4}{3x+2} + \frac{3}{2y+1} = 4$ ,  
 令  $t = 3x+2, s = 2y+1, x = \frac{t-2}{3} > 0, y = \frac{s-1}{2} > 0$ ,  
 $\therefore x+2y = \frac{t-2}{3} + s - 1 = \frac{t}{3} + s - \frac{5}{3} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{t} + \frac{3}{s}\right) \left(\frac{t}{3} + s\right) - \frac{5}{3} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} + 3 + \frac{4s}{t} + \frac{3t}{s}\right) - \frac{5}{3} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{13}{3} + 4\right) - \frac{5}{3} = \frac{25}{12} - \frac{5}{3} = \frac{5}{12}$ ,  
 当且仅当  $t=2, s=1$  时取等号, 此时  $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{8}, x+2y = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \times 2 = \frac{5}{12}$ .
16.  $\left(0, \frac{1}{2e}\right)$  【解析】 $(\ln x)^2 - 3ax \ln x + 2a^2 x^2 = 0$ , 两边同时除以  $x^2$ , 因式分解得  $\left(\frac{\ln x}{x} - 2a\right) \left(\frac{\ln x}{x} - a\right) = 0$ , 令  $t = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $(t-2a) \cdot (t-a) = 0$ , 解得  $t_1 = a$  或  $t_2 = 2a$ , 设  $g(x) = \frac{\ln x}{x}, g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ , 当  $x \in (0, e)$  时,  $g'(x) > 0, g(x)$  单调递增; 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0, g(x)$  单调递减,  $g(1) = 0, g(e) = \frac{1}{e}$ , 当  $x > e$  时,  $g(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  的大致图象如图:



- 若  $g(x) = a$  和  $g(x) = 2a$  共有 4 个实数根, 则有  $0 < a < \frac{1}{e}$  且  $0 < 2a < \frac{1}{e}$ , 解得  $0 < a < \frac{1}{2e}$ .
17. 【解析】(1)  $c_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2, c_2 = a_3 = a_2 + 1 = a_2 - 2 + 1 = 1, c_3 = a_4 = a_3 + 1 = a_3 - 2 + 1 = 0$ ,  
 由题意知,  $b_{n+1} = a_{2n+1} = a_{2n} - 2 = a_{2n-1} + 1 - 2 = a_{2n-1} - 1 = b_n - 1$ , 所以数列  $\{b_n\}$  是首项为 1, 公差为 -1 的等差数列.  
 (2)  $c_{n+1} = a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1 = a_{2n} - 2 + 1 = a_{2n} - 1 = c_n - 1$ , 所以数列  $\{c_n\}$  是首项为 2, 公差为 -1 的等差数列,  
 结合 (1) 可知,  $\{a_n\}$  的奇数项和偶数项都是以 -1 为公差的等差数列,  
 所以  $S_{22} = a_1 + a_2 + \dots + a_{22} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{21}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{22})$   
 $= (b_1 + b_3 + \dots + b_{11}) + (c_1 + c_3 + \dots + c_{11})$   
 $= 1 \times 11 + \frac{11 \times 10}{2} \times (-1) + 2 \times 11 + \frac{11 \times 10}{2} \times (-1) = -77$ .
18. 【解析】(1)  $f(x) = a \cdot b - 1 = 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x) - 1 = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x - 1 = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ ,  
 则函数  $y = f(x)$  的值域为  $[-3, 1]$ .  
 (2)  $f(x) = 0$ , 即  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore x \in [0, m]$ , 则  $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, 2m + \frac{\pi}{3}\right]$ , 函数  $y = f(x)$  在  $x \in [0, m]$  上有 10 个零点,  
 即  $\frac{\pi}{6} + 10\pi \leq 2m + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} + 10\pi$ , 解得  $\frac{59\pi}{12} \leq m < \frac{21\pi}{4}$ .

19.【解析】(1)当  $a=2$  时,  $f(x)=x(\ln x-2)$ ,  $f'(x)=\ln x-1$ ,  $f'(x)=0$  时,  $x=e$ ,

当  $x \in (0, e)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $y=f(x)$  单调递减, 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $y=f(x)$  单调递增,

所以  $x=e$  是函数  $y=f(x)$  的极小值点, 无极大值点. 微信搜《高三答案公众号》

(2)当  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq -\ln x - 2$  恒成立, 即当  $x \geq 1$  时,  $(x+1)\ln x - ax + 2 \geq 0$  恒成立, 设  $F(x) = (x+1)\ln x - ax + 2$ ,

则  $F(1) = 2 - a \geq 0$ ,  $\therefore a \leq 2$ ,  $F'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a$ , 设  $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a$ ,

$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ ,  $\therefore x \geq 1$ ,  $\therefore g'(x) \geq 0$ ,  $g(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增,  $g(1) = 2 - a$ ,  $g(x) \geq g(1) = 2 - a \geq 0$ ,

$\therefore F'(x) = g(x) \geq 0$ ,  $\therefore F(x)$  在  $[1, +\infty)$  是增函数,  $\therefore F(x) \geq F(1) = 2 - a$ , 若  $F(x) \geq 0$  恒成立, 则  $a \leq 2$ ,

所以  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq -\ln x - 2$  恒成立,  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 2]$ .

20.【解析】(1)在  $\triangle ACD$  中, 由正弦定理得  $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{CD}{\sin \angle DAC}$  ①,

在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理得  $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$  ②,

①②两式相除得  $\frac{AD}{AB} = \frac{CD \cdot \sin \angle BAC}{BC \cdot \sin \angle DAC}$ , 因为  $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$ , 所以  $\sin \angle DAC = \sin \angle BAC$ ,

又因为  $0 < \angle DAC < \pi$ ,  $0 < \angle BAC < \pi$ ,  $\angle DAC \neq \angle BAC$ , 所以  $\angle BAC + \angle DAC = \pi$ .

(2)  $AB=2, AC=1, BC=\sqrt{7}$ ,  $\therefore \cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4+1-7}{2 \times 2 \times 1} = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore 0 < \angle BAC < \pi$ ,  $\therefore \angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ ,

$\therefore \angle DAC = \pi - \angle BAC = \frac{\pi}{3}$ , 由(1)得  $AD \cdot BC = AB \cdot CD$ ,  $\therefore \sqrt{7}AD = 2CD$ ,

设  $AD=x$ ,  $CD=\frac{\sqrt{7}}{2}x$ , 则在  $\triangle ACD$  中,  $\cos \angle DAC = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \cdot AC} = \frac{4x^2 + 1 - 7x^2}{2 \times 2x} = \frac{1}{2}$ , 解得  $x = \frac{1}{3}$  或  $x = -1$  (舍去),

$\therefore AD = \frac{2}{3}$ ,  $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = \frac{\pi}{3}$ ,  $\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

21.【解析】(1)  $\because$  当  $n \geq 2$  时,  $2(n-1)S_n = 2nS_{n-1} + n^2 - n$ ,  $\therefore \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{2}n - 1$ , ①,  $S_1 = a_1 = 2$ ,  $\therefore \frac{S_1}{1} = \frac{a_1}{1} = 2$ ,

$\therefore \left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$  是以 2 为首项,  $\frac{1}{2}$  为公差的等差数列,  $\therefore \frac{S_n}{n} = \frac{n+3}{2}$ ,

$\therefore S_n = \frac{n(n+3)}{2}$ , 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = n+1$ , 当  $n=1$  时,  $a_1 = 2$ , 符合数列  $\{a_n\}$  的通项公式,

$\therefore a_n = n+1$ .

(2)  $\frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ , 当  $n=1$  时,  $\frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{4} < \frac{2}{3}$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

$< \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$

$= \frac{2}{3}$ .

22.【解析】(1)  $f'(x) = 2 - \frac{2a}{e^{2x}} = \frac{2(e^{2x} - a)}{e^{2x}}$ ,

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增;

当  $a > 0$  时,  $x \in \left(-\infty, \frac{\ln a}{2}\right)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $x \in \left(\frac{\ln a}{2}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以函数  $f(x)$  在  $\left(-\infty, \frac{\ln a}{2}\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{\ln a}{2}, +\infty\right)$  上单调递增.

(2) 由(1)知当  $\ln a < 0$  即  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  有两个零点, 不妨设  $x_1, x_2$  是函数  $f(x)$  的两个零点, 则  $\frac{a}{e^{2x_1}} = -2x_1, \frac{a}{e^{2x_2}} = -2x_2$ , 两式相除得  $e^{2(x_2-x_1)} = \frac{x_1}{x_2}$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 设  $t = x_2 - x_1 > 0$ , 则  $e^{2t} = \frac{x_2 - t}{x_2} = 1 - \frac{t}{x_2}, x_2 = \frac{t}{1 - e^{2t}}, x_1 = \frac{t}{1 - e^{2t}} - t = \frac{te^{2t}}{1 - e^{2t}}, x_1 \cdot x_2 = \frac{t^2 e^{2t}}{(1 - e^{2t})^2}$ , 要证  $x_1 x_2 < 1$ , 只需证  $\frac{t^2 e^{2t}}{(1 - e^{2t})^2} < 1$ ,

即证:  $e^{4t} - 2e^{2t} - t^2 e^{2t} + 1 > 0, t > 0$ , 设  $g(t) = e^{4t} - 2e^{2t} - t^2 e^{2t} + 1, g'(t) = 4e^{4t} - 4e^{2t} - 2(t+t^2)e^{2t} = 4e^{2t} \left[ e^{2t} - 1 - \frac{1}{2}(t+t^2) \right]$ ,

$h(t) = e^{2t} - 1 - \frac{1}{2}(t+t^2), h'(t) = 2e^{2t} - \frac{1}{2}(1+2t) > 2(2t+1) - \frac{1}{2}(1+2t) = 3t + \frac{3}{2} > 0, h(t)$  在  $t > 0$  时单调递增,  $h(t) > h(0) = 0$ ,

所以  $g'(t) > 0$ , 所以  $g(t)$  在  $t > 0$  时单调递增,  $g(t) > g(0) = 0$ , 即  $e^{4t} - 2e^{2t} - t^2 e^{2t} + 1 > 0, \therefore x_1 x_2 < 1$ .



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线