

学校:_____ 准考证号:_____ 姓名:_____

(在此卷上答题无效)

长郡中学 2020 届高三适应性考试(三)

理科数学

本试题卷共 8 页, 全卷满分 150 分。

注意事项:

- 1.答题前, 考生可能需要输入信息。请务必正确输入所需的信息, 如姓名、考生号等。
- 2.选择题的作答:请直接在选择题页面内作答并提交。写在试题卷、草稿纸等非答题区域均无效。
- 3.非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡, 上对应的答题区域内或空白纸张上, 按规定上传。
- 4.选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用笔涂黑, 或者在空白纸张上注明所写题目, 然后开始作答。

一、选择题:本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1.集合 $\{x \in N^* \mid \frac{12}{x} \in Z\}$ 中含有的元素个数为

- A.4 B.6 C.8 D.12

2.设 $a, b \in R$, i 是虚数单位, 则“复数 $z = a + bi$ 为纯虚数”是“ $ab=0$ ”的

- A.充要条件 B.必要不充分条件
C.既不充分也不必要条件 D.充分不必要条件

3.2019 年 10 月 1 日上午, 庆祝中华人民共和国成立 70 周年阅兵仪式在天安门广场隆重举行。这次阅兵不仅展示了我国的科技军事力量, 更是让世界感受到了中国的日新月异。今年的阅兵方阵有一个很抢眼, 他们就是院校科研方阵。他们是由军事科学院、国防大学、国防科技大学联合组建。若已知甲、乙、丙三人来自上述三所学校, 学历分别有学士、硕士、博士学位。现知道:①甲不是军事科学院的;②来自军事科学院的不是博士;③乙不是军事科学院的;④乙不是博士学位;⑤国防科技大学的是研究生。则丙是来自哪个院校的, 学位是什么

- A.国防大学, 博士 B.国防科技大学, 研究生
C.国防大学, 研究生 D.军事科学院, 学士

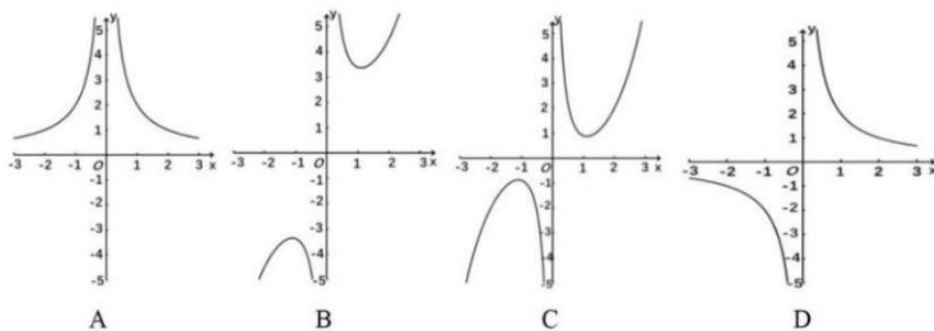
4. $(\frac{1}{x} + x + y^2)^8$ 的展开式中 $x^{-1}y^2$ 的系数为

- A.160 B.240 C.280 D.320

5.已知 $a = \ln 3, b = \log_3 e, c = \log_\pi e$ (注: e 为自然对数的底数), 则下列关系正确的是

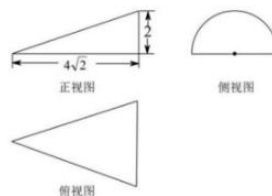
- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

6.函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x^2 + 1)}$ 在 $[-3, 3]$ 的图象大致为



7. 一个几何体的三视图及尺寸如下图所示，其中正视图是直角三角形，侧视图是半圆，俯视图是等腰三角形，该几何体的表面积是

- A. $8\sqrt{2}+8\pi$
B. $8\sqrt{2}+16\pi$
C. $16\sqrt{2}+8\pi$
D. $16\sqrt{2}+16\pi$



8. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 且 $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{3}$, $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则

$$\cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) =$$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ D. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$

9. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的两个焦点，过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线

与 C 相交于 A, B 两点，若 $|AB| = \sqrt{2}$, 则 $\triangle ABF_2$ 的内切圆的半径为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 2$, 将这个数列中的项摆放成如图所示的数阵. 记 b_n 为数阵从左至右的 n

列, 从上到下的 n 行共 n^2 个数的和, 则数列 $\left\{\frac{n}{b_n}\right\}$ 的前

2020 项和为

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{n+1}
a_3	a_4	a_5	$\cdots$	a_{n+2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	$\cdots$	a_{2n-1}

- A. $\frac{1011}{2020}$ B. $\frac{2019}{2020}$ C. $\frac{2020}{2021}$ D. $\frac{1010}{2021}$

11. 上世纪末河南出土的以鹤的尺骨(翅骨)制成的“骨笛”(图 1), 充分展示了我国古代高超的音律艺术及先进的数学水平, 也印证了我国古代音律与历法的密切联系. 图 2 为骨笛测量“春(秋)分”, “夏(冬)至”的示意图, 图 3 是某骨笛的部分测量数据(骨笛的弯曲忽略不计), 夏至(或冬至)日光(当日正午太阳光线)与春秋分日光(当日正午太阳光线)的夹角等于黄赤交角.



图 1

角.

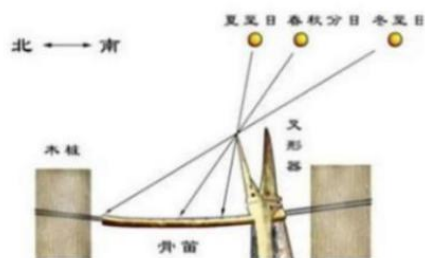


图 2

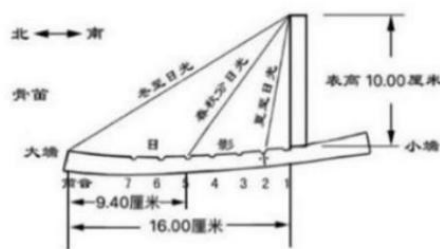


图 3

由历法理论知, 黄赤交角近 1 万年持续减小, 其正切值及对应的年代如下表:

黄赤交角	23°41'	23°57'	24°13'	24°28'	24°44'
正切值	0.439	0.444	0.450	0.455	0.461
年代	公元元年	公元前 2000 年	公元前 4000 年	公元前 6000 年	公元前 8000 年

根据以上信息, 通过计算黄赤交角, 可估计该骨笛的大致年代是

- A. 早于公元前 6000 年 B. 公元前 2000 年到公元元年
C. 公元前 4000 年到公元前 2000 年 D. 公元前 6000 年到公元前 4000 年

12. 在满足 $0 < x_i < y_i \leq 4$, $x_i^{y_i} = y_i^{x_i}$ 的实数对 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ 中, 使得

$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 3x_n$ 成立的正整数 n 的最大值为

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 9

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

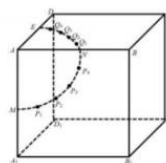
13. 近年来, 新能源汽车技术不断推陈出新, 新产品不断涌现, 在汽车市场上影响力不断增大. 动力电池技术作为新能源汽车的核心技术, 它的不断成熟也是推动新能源汽车发展的主要动力. 假定现在市售的某款新能源汽车上, 车载动力电池充放电循环次数达到 2000 次的概率为 85%, 充放电循环次数达到 2500 次的概率为 35%. 若某用户的自用新能源汽车已经经过了 2000 次充电, 那么他的车能够充电 2500 次的概率为_____。

14. 动点 P 到直线 $x=-1$ 的距离和到定点 $F(1, 0)$ 的距离相等, 直线 AB 过 $(4, 0)$ 且交点 P 的轨迹于 A, B 两点, 则以 AB 为直径的圆必过_____。

15. 已知 $f(x) = \ln x$ 和 $g(x) = \frac{4e^2}{(x-a)^2}$, 如果函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有三个零点, 则实

数 a 的取值范围是_____。

16. 如图, 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 、 N 、 E 分别为棱 AA_1 、 AB 、 AD 的中点, 以 A 为圆心, 1 为半径, 分别在面 ABB_1A_1 和面 $ABCD$ 内作弧 MN 和 NE , 并将两弧各五等分, 分点依次为 M 、 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 N 以及 N 、 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 、 E 。一只蚂蚁欲从点 P 出发, 沿正方体的表面爬行至 Q_4 , 则其爬行的最短距离为_____。



(参考数据: $\cos 9^\circ = 0.9877$; $\cos 18^\circ = 0.9511$; $\cos 27^\circ = 0.8910$)

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

已知 a , b , c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A , B , C 的对边, 若 $\triangle ABC$ 同时满足下列四个条件

中的三个: ① $\frac{b-a}{c} = \frac{2\sqrt{6}a+3c}{3(a+b)}$; ② $\cos 2A + 2\cos^2 \frac{A}{2} = 1$; ③ $a = \sqrt{6}$; ④ $b = 2\sqrt{2}$.

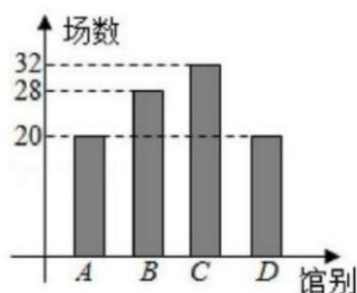
(I) 满足有解三角形的序号组合有哪些?

(II) 在(I)所有组合中任选一组, 并求对应 $\triangle ABC$ 的面积.(若所选条件出现多种可能, 则按计算的第一种可能计分)

18. (本小题满分 12 分)

为了提高市民身体素质, 某市把 A, B, C, D 四个篮球馆全部转为免费民用。

(I) 在一次全民健身活动中, 四个篮球馆的使用场数如图, 用分层抽样的方法从 A, B, C, D 四场馆的使用场数中依次抽取 a_1 , a_2 , a_3 , a_4 共 25 场, 在 a_1 , a_2 , a_3 , a_4 中随机取两数, 求这两数和 ξ 的分布列和数学期望;



(II) 设四个篮球馆一个月内各馆使用次数之和为 x , 其相应维修费用为 y 元, 根据统计, 得到如下表的 y 与 x 数据:

x	10	15	20	25	30	35	40
y	10000	11761	13010	13980	14771	15440	16020
$z = 0.1e^{\frac{y}{4343}} + 2$	2.99	3.49	4.05	4.50	4.99	5.49	5.99

① 用最小二乘法求 z 与 x 之间的回归直线方程;

② $\frac{y}{x+40}$ 叫做篮球馆月惠值, 根据①的结论, 试估计这四个篮球馆月惠值最大时 x 的值。

参考数据和公式： $\bar{z} = 4.5$ ， $\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = 700$ ， $\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) = 70$ ， $e^3 = 20$ ，

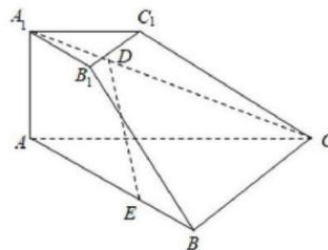
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{z} - \hat{b}\bar{x}$$

19. (本小题满分 12 分)

如图，三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 A_1B_1BA 与侧面 A_1C_1CA 是全等的梯形，若 $A_1A \perp AB$ ， $A_1A \perp A_1C_1$ ，且 $AB = 2A_1B_1 = 4A_1A$ 。

(I) 若 $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA}$ ， $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$ ，证明：DE // 平面 BCC_1B_1 ；

(II) 若二面角 C_1-AA_1-B 为 $\frac{\pi}{3}$ ，求平面 A_1B_1BA 与平面 C_1B_1BC 所成的锐二面角的余弦值。



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (a-1)x - \ln x (a \in \mathbb{R} \text{ 且 } a \neq 0)$ 。

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(II) 记函数 $y = F(x)$ 的图象为曲线 C 。设点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 是曲线 C 上的不同两点。如果在曲线 C 上存在点 $M(x_0, y_0)$ ，使得：① $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ；② 曲线 C 在点 M 处的切线平行于直线 AB ，则称函数 $F(x)$ 存在“中值和谐切线”。当 $a = 2$ 时，函数 $f(x)$ 是否存在“中值和谐切线”，请说明理由。

21. (本小题满分 12 分)

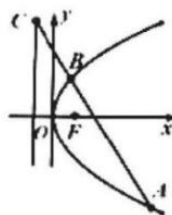
已知抛物线 $G: y^2 = 2px$, 焦点为 F , 直线 l 交抛物线 G 于 A, B 两点, 交抛物线 G 的准线于点 C . 如图所示当直线 l 经过焦点 F 时, 点 F 恰好是线段 AC 的中点且 $|BC| = \frac{8}{3}$

(I) 求抛物线 G 的方程:

(II) 点 O 是坐标原点, 设直线 OA, OB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 当直线 l 的纵截距为 1 时, 有

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, k_1 = -16a_{n+1}, k_2 = 4(a_n + 2)^2$, 设数列 $\left\{\frac{a_n}{1+a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已

知存在正整数 m , 使得 $m \leq S_{2020} < m+1$, 求 m 的值.



请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C 的极坐标方程是 $\rho = 4\cos\theta$. 以极点为平面直角坐标系的原点, 极轴为 x 轴的正半轴,

建立平面直角坐标系, 直线 l 的参数方程是:
$$\begin{cases} x = m + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 是参数}).$$

(I) 若直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = \sqrt{14}$, 试求实数 m 值;

(II) 设 $M(x, y)$ 为曲线 C 上任意一点, 求 $x+y$ 的取值范围.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| - |x+a|$

(I) 若 $a = -1$, 求不等式 $f(x) \geq -1$ 的解集;

(II) 若“ $\forall x \in R, f(x) < |2a+1|$ ”为假命题, 求 a 的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

福利：

- 1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料
- 2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题