

试卷类型：A

潍坊市高考模拟考试

数 学

2020.5

本试卷共4页，满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的学校、姓名、班级、座号、考号填涂在相应位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

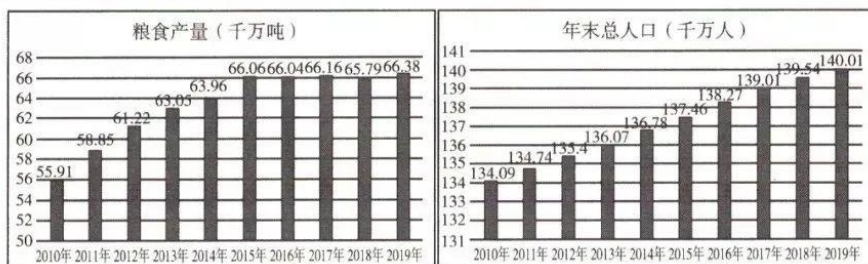
1. 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 6, 7\}$ , 则  $A \cap \complement_U B =$   
A.  $\{1, 4\}$                       B.  $\{1, 4, 5\}$                       C.  $\{4, 5\}$                       D.  $\{6, 7\}$
2. 若复数  $z = \frac{a+i}{1-i}$  在复平面内对应的点在第二象限内，则实数  $a$  的值可以是  
A. 1                                  B. 0                                  C. -1                                  D. -2
3. 甲、乙、丙三人中，一人是律师，一人是医生，一人是记者。已知丙的年龄比医生大；甲的年龄和记者不同；记者的年龄比乙小。根据以上情况，下列判断正确的是  
A. 甲是律师，乙是医生，丙是记者                      B. 甲是医生，乙是记者，丙是律师  
C. 甲是医生，乙是律师，丙是记者                      D. 甲是记者，乙是医生，丙是律师
4. 以抛物线  $E: x^2 = 4y$  的焦点为圆心，且与  $E$  的准线相切的圆的方程为  
A.  $(x-1)^2 + y^2 = 4$                       B.  $x^2 + (y+1)^2 = 4$   
C.  $(x+1)^2 + y^2 = 4$                       D.  $x^2 + (y-1)^2 = 4$
5. 设函数  $f(x)$  为奇函数，且当  $x \geq 0$  时， $f(x) = e^x - \cos x$ ，则不等式  $f(2x-1) + f(x-2) > 0$  的解集为  
A.  $(-\infty, 1)$                       B.  $(-\infty, \frac{1}{3})$                       C.  $(\frac{1}{3}, +\infty)$                       D.  $(1, +\infty)$
6. 《周髀算经》是中国古代重要的数学著作，其记载的“日月历法”曰：“阴阳之数，日月之法，十九岁为一章，四章为一部，部七十六岁，二十部为一遂，遂千百五十二岁，…，生数皆终，万物复苏，天以更元作纪历”。某老年公寓住有20位老人，他们的年龄（都为正整数）之和恰好为一遂，其中年长者已是奔百之龄（年龄介于90-100），其余19人的年龄依次相差一岁，则年长者的年龄为  
A. 94                                  B. 95                                  C. 96                                  D. 98
7. 在四面体  $ABCD$  中， $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  均是边长为1的等边三角形，已知四面体  $ABCD$  的四个顶点都在同一球面上，且  $AD$  是该球的直径，则四面体  $ABCD$  的体积为  
A.  $\frac{\sqrt{2}}{24}$                                   B.  $\frac{\sqrt{2}}{12}$                                   C.  $\frac{\sqrt{2}}{6}$                                   D.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

8. 已知  $O$  为坐标原点, 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 过点  $F$  且与  $x$  轴垂直的直线与双曲线  $C$  的一条渐近线交于点  $A$  (点  $A$  在第一象限), 点  $B$  在双曲线  $C$  的渐近线上, 且  $BF \parallel OA$ , 若  $\vec{AB} \cdot \vec{OB} = 0$ , 则双曲线  $C$  的离心率为

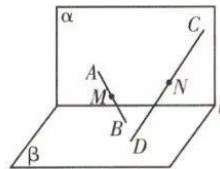
- A.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       B.  $\sqrt{2}$       C.  $\sqrt{3}$       D. 2

二、多项选择题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. 我国是世界第一产粮大国, 我国粮食产量很高, 整体很安全. 按照 14 亿人口计算, 中国人均粮食产量约为 950 斤——比全球人均粮食产量高了约 250 斤. 下图是中国国家统计局网站中 2010 - 2019 年, 我国粮食产量(千万吨)与年末总人口(千万人)的条形图, 根据下图可知在 2010 - 2019 年

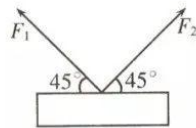


- A. 我国粮食年产量与年末总人口均逐年递增  
 B. 2011 年我国粮食年产量的年增长率最大  
 C. 2015 年 - 2019 年我国粮食年产量相对稳定  
 D. 2015 年我国人均粮食年产量达到了最高峰
10. 若  $a < b < -1, c > 0$ , 则下列不等式中一定成立的是  
 A.  $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$       B.  $a - \frac{1}{b} < b - \frac{1}{a}$       C.  $\ln(b - a) > 0$       D.  $(\frac{a}{b})^c > (\frac{b}{a})^c$
11. 在单位圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  上任取一点  $P(x, y)$ , 圆  $O$  与  $x$  轴正向的交点是  $A$ , 设将  $OA$  绕原点  $O$  旋转到  $OP$  所成的角为  $\theta$ , 记  $x, y$  关于  $\theta$  的表达式分别为  $x = f(\theta), y = g(\theta)$ , 则下列说法正确的是  
 A.  $x = f(\theta)$  是偶函数,  $y = g(\theta)$  是奇函数  
 B.  $x = f(\theta)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  为增函数,  $y = g(\theta)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  为减函数  
 C.  $f(\theta) + g(\theta) \geq 1$  对于  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  恒成立  
 D. 函数  $t = 2f(\theta) + g(2\theta)$  的最大值为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
12. 如图, 平面  $\alpha \cap$  平面  $\beta = l, A, C$  是  $\alpha$  内不同的两点,  $B, D$  是  $\beta$  内不同的两点, 且  $A, B, C, D \notin$  直线  $l, M, N$  分别是线段  $AB, CD$  的中点. 下列判断正确的是  
 A. 若  $AB \parallel CD$ , 则  $MN \parallel l$   
 B. 若  $M, N$  重合, 则  $AC \parallel l$   
 C. 若  $AB$  与  $CD$  相交, 且  $AC \parallel l$ , 则  $BD$  可以与  $l$  相交  
 D. 若  $AB$  与  $CD$  是异面直线, 则  $MN$  不可能与  $l$  平行



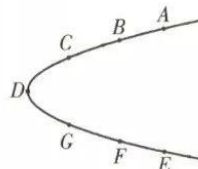
三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 如图所示,一个物体被两根轻质细绳拉住,且处于平衡状态. 已知两条绳上的拉力分别是  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ , 且  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  与水平夹角均为  $45^\circ$ ,  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 10\sqrt{2}\text{N}$ , 则物体的重力大小为 \_\_\_\_\_ N.



14. 已知  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\tan\alpha =$  \_\_\_\_\_.

15. 植树造林,绿化祖国. 某班级义务劳动志愿者小组参加植树活动,准备在一抛物线形地块上的  $ABCDGFE$  七点处各种植一棵树苗,如图所示,其中  $A, B, C$  分别与  $E, F, G$  关于抛物线的对称轴对称. 现有三种树苗,要求每种树苗至少种植一棵,且关于抛物线的对称轴对称的两点处必须种植同一种树苗,则共有不同的种植方法数是 \_\_\_\_\_.(用数字作答)



16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ 2x^3 - 3x^2 + 1, & x < 1 \end{cases}$ , 则  $x \in [-1, e]$  时,  $f(x)$  的最小值为 \_\_\_\_\_, 设  $g(x) = [f(x)]^2 - f(x) + a$ , 若函数  $g(x)$  有 6 个零点, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.(本题第一空 2 分,第二空 3 分)

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中,角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a = 2\sqrt{3}, A = \frac{\pi}{3}$ .

- (1) 若  $B = \frac{\pi}{4}$ , 求  $b$ ;
- (2) 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  为正项等比数列,  $a_1 = 1$ ; 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_2 = 3, a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n = 3 + (2n - 3)2^n$ .

- (1) 求  $a_n$ ;
- (2) 求  $\left\{ \frac{1}{b_nb_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

19. (12 分)

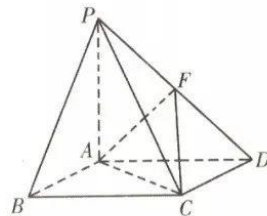
请从下面三个条件中任选一个,补充在下面的横线上,并作答.

- ①  $AB \perp BC$ , ②  $FC$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\frac{\pi}{6}$ , ③  $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ .

如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,底面  $ABCD$  是菱形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 且  $PA = AB = 2$ ,  $PD$  的中点为  $F$ .

(1) 在线段  $AB$  上是否存在一点  $G$ , 使得  $AF \parallel$  平面  $PCG$ ? 若存在,指出  $G$  在  $AB$  上的位置并给以证明;若不存在,请说明理由.

- (2) 若 \_\_\_\_\_, 求二面角  $F-AC-D$  的余弦值.  
注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.



高三数学试题第 3 页(共 4 页)



20. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{x} + a \ln x, g(x) = \frac{e^x}{x}$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 证明:  $a = 1$  时,  $f(x) + g(x) - (1 + \frac{e}{x^2}) \ln x > e$ .

21. (12分)

区块链技术被认为是继蒸汽机、电力、互联网之后,下一代颠覆性的核心技术. 区块链作为构造信任的机器,将可能彻底改变整个人类社会价值传递的方式. 2015年至2019年五年期间,中国的区块链企业数量逐年增长,居世界前列. 现收集我国近5年区块链企业总数量相关数据,如下表:

年份	2015	2016	2017	2018	2019
编号 $x$	1	2	3	4	5
企业总数量 $y$ (单位:千个)	2.156	3.727	8.305	24.279	36.224

注:参考数据  $\sum_{i=1}^5 y_i = 74.691, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 312.761, \sum_{i=1}^5 z_i = 10.980, \sum_{i=1}^5 x_i z_i = 40.457$  (其中  $z = \ln y$ )

附:样本  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$  的最小二乘法估计公式为  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ .

(1) 根据表中数据判断,  $y = a + bx$  与  $y = ce^{ax}$  (其中  $e = 2.71828\dots$ , 为自然对数的底数) 哪一个回归方程类型适宜预测未来几年我国区块链企业总数量? (给出结果即可, 不必说明理由)

(2) 根据(1)的结果, 求  $y$  关于  $x$  的回归方程 (结果精确到小数点后第三位);

(3) 为了促进公司间的合作与发展, 区块链联合总部决定进行一次信息化技术比赛, 邀请甲、乙、丙三家区块链公司参赛. 比赛规则如下: ①每场比赛有两个公司参加, 并决出胜负; ②每场比赛获胜的公司与未参加此场比赛的公司进行下一场的比赛; ③在比赛中, 若有一个公司首先获胜两场, 则本次比赛结束, 该公司就获得此次信息化比赛的“优胜公司”.

已知在每场比赛中, 甲胜乙的概率为  $\frac{1}{3}$ , 甲胜丙的概率为  $\frac{3}{5}$ , 乙胜丙的概率为  $\frac{1}{2}$ . 请通过计算说明, 哪两个公司进行首场比赛时, 甲公司获得“优胜公司”的概率最大?

22. (12分)

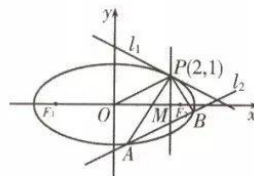
已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $P(2, 1), F_1, F_2$  分别为椭圆  $C$  的左、右焦点且  $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = -1$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过  $P$  点的直线  $l_1$  与椭圆  $C$  有且只有一个公共点, 直线  $l_2$  平行于  $OP$  ( $O$  为原点), 且与椭圆  $C$  交于两点  $A, B$ , 与直线  $x=2$  交于点  $M$  ( $M$  介于  $A, B$  两点之间).

(i) 当  $\triangle PAB$  面积最大时, 求  $l_2$  的方程;

(ii) 求证:  $|PA| \cdot |MB| = |PB| \cdot |MA|$ , 并判断  $l_1, l_2, PA, PB$  的斜率是否可以按某种顺序构成等比数列?



## 关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (<http://www.zizzs.com/>) 和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

### 关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”，即可获取《高考考前必背知识点》