惠州市2023届高三第一次模拟考试

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题：本题共8小题，每小题满分5分，共40分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	B	B	D	C	A	C

1.【解析】两复数相乘为实数，则复数 $z=\overline{1+2i}$，∴复数 z 的虚部为 -2． 故选 A．

2.【解析】由 $2^6=64, 2^7=128, 2^9=512, 2^{10}=1024$ 得 $M=\{7,8,9\}$，则其元素个数为3，故选 A．

3.【解析】因为 $8\times 15\%=1.2$，所以该数学成绩的 15% 分位数为第2个数据70，选 B．

4.【解析】由图2知无水部分体积与有水部分体积比为1:2，所以图1中高度比为1:2，得 $h=3$．选 B．

5.【解析】因为 $\tan\alpha=\frac{\cos\alpha}{3-\sin\alpha}$，所以 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{3-\sin\alpha}$，即 $3\sin\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$，

所以 $3\sin\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，即 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，所以 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$，故选 D．

6.【解析】由图4可知，"心形"关于 y 轴对称，所以上部分的函数为偶函数，排除 B，D；

又"心形"函数的最大值为1，而 A 选项中 $x=1$ 时，$y=\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3}>1$，排除 A．故选 C．

7.【解析】由已知得总项数7项，则 $n=6$，展开式的通项 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r 2^{6-r}x^{6-\frac{3}{2}r}$，

当 r 是偶数时该项为有理项，∴ r=0,2,4,6 从中任取2项，则都是有理项的概率为 $P=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{2}{7}$．选 A．

8.【解析】对于A，由函数 $g(x)$ 是"类奇函数"，所以 $g(x)g(-x)=1$，且 $g(x)>0$，所以当 $x=0$ 时，

$g(0)g(-0)=1$，即 $g(0)=1$，故A正确；

对于B，由 $g(x)g(-x)=1$，即 $g(-x)=\frac{1}{g(x)}$，$g(-x)$ 随 $g(x)$ 的增大而减小，若 $g(x)_{\max}=g(4)=4$，则 $g(x)_{\min}=g(-4)=\frac{1}{4}$ 成立，故B正确；

对于C，由 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(-x)=\frac{1}{g(x)}$，在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减，设 $t=-x\in(-\infty,0)$，

∴ $g(t)$ 在 $t\in(-\infty,0)$ 上单调递增，即 $g(x)$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 上单调递增，故C错误；

对于D，由 $g(x)g(-x)=1$，$h(x)h(-x)=1$，所以 $G(x)G(-x)=g(x)g(-x)h(x)h(-x)=1$，所以函数 $G(x)=g(x)h(x)$ 也是"类奇函数"， 所以D正确；故选 C．

二、多项选择题：本题共4小题，每小题满分5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分。

题号	9	10	11	12
全部正确答案	*AC*	*ABD*	*BD*	*BCD*

9.【解析】对于 A，由于$\xi \sim B(4,\frac{1}{4})$，则 $E(\xi)=4\times 0.25=1$，故 A 正确；

对于 B，$\because X\sim N(3,\sigma^2)$，$\therefore P(3<X\leq 4)=0.64-0.5=0.14$，故 $P(2\leq X\leq 3)=P(3<X\leq 4)=0.14$，故 B 错误，

对于 C，$\because x_1,x_2,x_3,...,x_{10}$的方差是 3，则$x_1+2,x_2+2,x_3+2,...,x_{10}+2$ 的方差不变，故 C 正确；

对于 D，∵回归方程必过样本中心点，则 $2.8=0.3m-m$，解得 $m=-4$，故 D 错误，

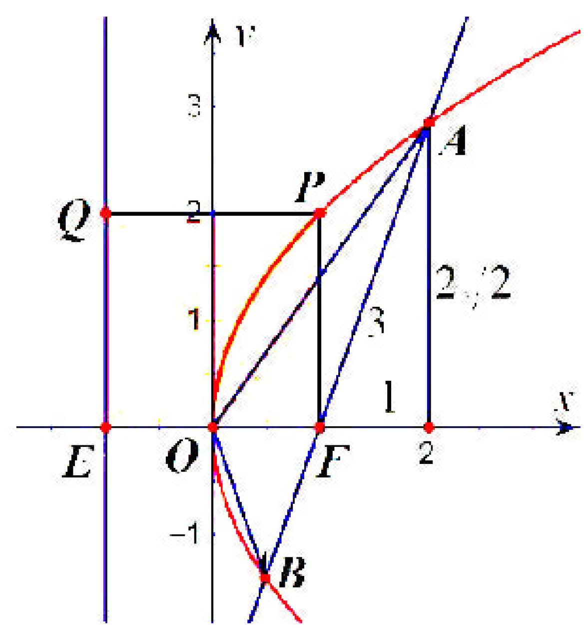
10.【解析】$\because 6^b=3$，$6^a=2$，$\therefore b=\log_6 3$，$a=\log_6 2$，则 $a+b=1$

对于 A，$\frac{b}{a}=\frac{log_6 3}{log_6 2}=\log_2 3>\log_2 2=1$，故 A 正确，

对于 B，$\because a+b=\log_6 3+\log_6 2=\log_6 6=1$，且 $a>0$，$b>0$，$\therefore ab<\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$，故 B 正确，

对于 C，$\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab>1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，故 C 错误，

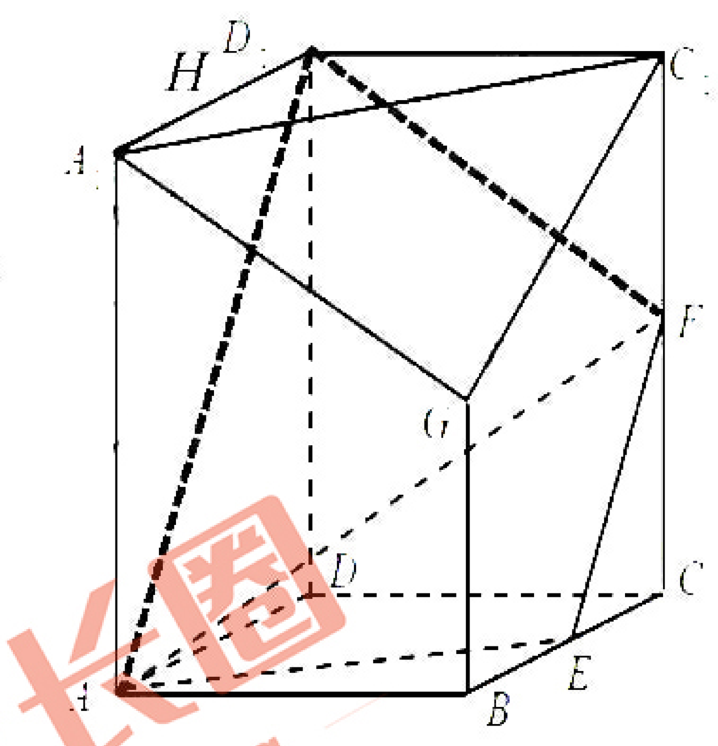
对于 D，$\because 5(b-a)=5log_6\frac{3}{2}=log_6\frac{243}{32}>log_6 6=1$，故 D 正确，故选：ABD.



11.【解析】数形结合作出抛物线图象，由过焦点直线斜率及抛物线定义可得 $p=2$，故 A 错误;由图知$\angle AOB$ 为钝角知 C 错误，故选：BD.

12.【解析】对于 A，连接D_1F，D_1A，可证得$D_1A//EF$，$\therefore A,E,F,D_1$四点共面，

又可证得$A_1G//D_1F$，所以$A_1G//$平面 AEF，故 A 错误；



对于 B，三棱锥C_1-BCD 的外接球半径 $R=\frac{1}{2}\cdot A_1C=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2+(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5}$，

三棱锥C_1-BCD 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=80\pi$，故 B 正确；

对于 C，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})(\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FC_1})=8$,

$cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{GC_1}>=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GC_1}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{GC_1}|}=\frac{8}{\sqrt{20}\sqrt{28}}=\frac{2\sqrt{35}}{35}$，故 C 正确；

对于 D，设二面角C_1-AD-B 的平面角为θ，则$\theta=\angle C_1DC$，所以 $tan\theta=\frac{C_1C}{CD}=\sqrt{3}$，于是$\theta=60°$，

$\because \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}$，且$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{QN}$，$<\overrightarrow{MP},\overrightarrow{QN}>=120°$

$\therefore \overrightarrow{MN}^2=(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN})^2=\overrightarrow{MP}^2+\overrightarrow{MP}^2+\overrightarrow{QN}^2+2\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{QN}=7$，$\therefore MN=\sqrt{7}$，故 D 正确．故选 BCD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{7}{2}$；　　14. $2\sqrt{2}$；　　15. $\frac{\pi}{3}$（答案一般形式 $x_n=\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\left(n\in N^*\right)$）；　　16. $\frac{2}{7}\vec{a}$

13.【解析】设公差为 d，$\therefore 4d=9-2$，$\therefore d=\frac{7}{4}$，故 $c-a=2d=\frac{7}{2}$．故答案为：$\frac{7}{2}$.

14.【解析】因为弦 AB 将圆分成两段弧长之差最大，此时 AB 垂直 OP，

由圆半径为 2，$|OP|=\sqrt{2}$，由勾股定理得$|AB|=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$.

15.【解析】由$\frac{T}{2}=x_3-x_2=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi$，故$\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，$\therefore f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z$，即 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},k\in Z$，$\therefore x_n=\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(n=1,2,3,...)$，

【答案的一般形式】$x_n=\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(n=1,2,3,\ldots)$，对$n$取特殊值即可，

取$n=1$，得$x_1=\frac{\pi}{3}$；取$n=2$，得$x_2=\frac{5\pi}{6}$，……(答案不唯一).

16.【解析】由$|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|=14$，得$AB=14$，设$A(-7,0)$、$B(7,0)$，由$|\overrightarrow{CA}|-|\overrightarrow{CB}|=6$，

得点C的轨迹是以A、B为焦点，实轴长为6的双曲线的右支(不含右顶点)，

因为CD是ΔABC的角平分线，且$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})(\lambda>0)$，$\therefore E$为$\Delta ABC$的内心，

设$E(x_0,y_0)$，由内切圆的性质得，$|AC|-|BC|=c+x_0-(c-x_0)=2a$，得$x_0=a=3$，

$\therefore\overrightarrow{BE}$在$\vec{a}$上的投影长为$c-a=4$，则$\overrightarrow{BE}$在$\vec{a}$上的投影向量为$\frac{2}{7}\vec{a}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分10分，其中第一小问6分，第二小问4分）

【解析】（1）当$n=1$时，$S_1=a_1=2a_1+2-5$，解得$a_1=3$，　……1分

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+2(n-1)-5$，　……2分

可得$S_n-S_{n-1}=2a_n+2n-5-[2a_{n-1}+2(n-1)-5]$，

整理得：$a_n=2a_{n-1}-2$，　……3分

从而$a_n-2=2(a_{n-1}-2)(n\geq 2)$，　……4分

又$a_1-2=1$，所以数列$\{a_n-2\}$是首项为1，公比为2的等比数列；　……5分

【注：无首项公比对数列下定义，则不得此分；若无下定义，用累乘法也可得此分】

所以$a_n-2=(a_1-2)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$，

所以$a_n=2^{n-1}+2$，　……6分

（2）由（1）得$a_n-2=2^{n-1}$，所以$a_{n+1}-2=2^n$，所以$b_n=log_2(a_{n+1}-2)=n$，……1分

$\therefore\frac{1}{b_{n+1}\cdot b_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，　……2分

所以$T_n=\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\frac{1}{b_3b_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}$

$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\cdots\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$　……3分

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.　……4分【注：结果没有通分，不扣分】

18.（本小题满分12分，其中第一小问5分，第二小问7分）

【解析】（1）【解法一】

在$\triangle ABD$中，由余弦定理$\cos A=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}$……1分【写出定理表达式可得1分】

得$\cos A=\frac{(2\sqrt{3})^2+2^2-BD^2}{2\times 2\sqrt{3}\times 2}$，即$\sqrt{3}\cos A=\frac{16-BD^2}{8}$①，　……2分

同理，在△BCD 中，$\cos C=\dfrac{2^2+2^2-BD^2}{2\times2\times2}$， ......3 分

即 $\cos C=\dfrac{8-BD^2}{8}$ ② ......4 分

①−②得 $\sqrt{3}\cos A-\cos C=1$，

所以当 BD 长度变化时，$\sqrt{3}cosA-cosC$ 为定值，定值为 1 ......5 分

【解法二】

在△ABD 中，由余弦定理 $BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos A$ ...1 分【写出定理表达式可得 1 分】

得 $BD^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2-2\times2\sqrt{3}\times2\times\cos A$,即 $BD^2=16-8\sqrt{3}\cos A$， ......2 分

同理，在△BCD 中，$BD^2=CD^2+CB^2-2CD\cdot CBcosC=8-8cosC$， ......3 分

所以 $16-8\sqrt{3}cosA=8-8cosC$， ......4 分

化简得 $\sqrt{3}cosA-1=cosC$，即 $\sqrt{3}cosA-cosC=1$

所以当 BD 长度变化时，$\sqrt{3}cosA-cosC$ 为定值，定值为 1 ......5 分

(2) $S_1^2+S_2^2=\frac{1}{4}AB^2\cdot AD^2\cdot\sin^2A+\frac{1}{4}BC^2\cdot CD^2\cdot\sin^2C$ ......1 分

$=12sin^2A+4sin^2C=12sin^2A+4-4cos^2C$ ......2 分

$=12sin^2A+4-4(\sqrt{3}cosA-1)^2$

$=-24cos^2A+8\sqrt{3}cosA+12$ ......3 分

令 $cosA=t, t\in(-1,1)$（或写出 $t\in(0,1)$）， ......4 分【注：无 t 的取值范围不得此分】

所以 $y=-24t^2+8\sqrt{3}t+12=-24\left(t-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+14$ ......5 分

所以 $t=\frac{\sqrt{3}}{6}$,即 $cosA=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时， ......6 分【注：无此步骤不得此分】

$S_1^2+S_2^2$ 有最大值为 14. ......7 分

19.（本小题满分 12 分，其中第一小问 4 分，第二小问 8 分）

【解析】（1）【解法一】连接 B_1A，由已知得，$B_1C_1//BC//AD$，且 $B_1C_1=AM=\frac{1}{2}BC$，

所以四边形 AB_1C_1M 是平行四边形， ......1 分

即 $C_1M//B_1A$， ......2 分

又 $C_1M\not\subset$ 平面 AA_1B_1B，$B_1A\subset$ 平面 AA_1B_1B， ......3 分【注：辅助条件不齐不得此分】

所以 $C_1M//$ 平面 AA_1B_1B ......4 分

【解法二】连接 AB_1, MD_1，由已知得 $AA_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} MD_1$， ......1 分

$\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{MD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB_1}$，即$C_1M//B_1A$，..2 分

又$C_1M\not\subset$平面 AA_1B_1B，$B_1A\subset$平面 AA_1B_1B，............3 分【注：辅助条件不齐不得此分】

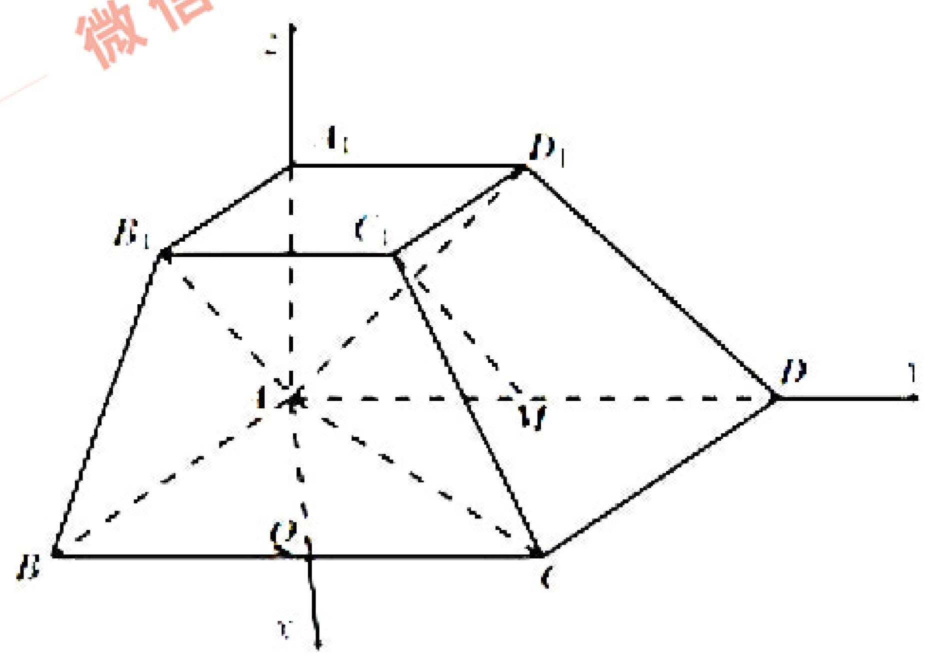
所以$C_1M//$平面 AA_1B_1B...4 分

（2）取 BC 中点 Q，连接 AQ，由题易得$\triangle ABC$ 是正三角形，所以 $AQ\perp BC$，即 $AQ\perp AD$，..........1 分

由于 $AA_1\perp$平面 $ABCD$．分别以 AQ，AD，AA_1为 x、y、z 轴，建立如图空间直角坐标系，...2 分

$A(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$D_1(0,1,1)$，$Q(\sqrt{3},0,0)$，

假设点 E 存在，设点 E 的坐标为$(\sqrt{3},\lambda,0)$，$-1\le\lambda\le1$，



$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},\lambda,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$，..................................3 分

设平面 AD_1E 的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}\sqrt{3}x+\lambda y=0\\ y+z=0\end{cases}$，可取$\vec{n}=(\lambda,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，..............................4 分

又平面 ADD_1的法向量为$\overrightarrow{AQ}=(\sqrt{3},0,0)$，..5 分

所以$|\cos<\overrightarrow{AQ},\vec{n}>|=\frac{\sqrt{3}|\lambda|}{\sqrt{3}\sqrt{\lambda^2+6}}=\frac{1}{3}$，解得：$\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，..6 分

由于二面角 $E-AD_1-D$ 为锐角，则点 E 在线段 QC 上，所以$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $CE=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ....7 分

故 BC 上存在点 E，当 $CE=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，二面角 $E-AD_1-D$ 的余弦值为$\frac{1}{3}$. ....8 分【注：无此步骤不得此分】

20.（本小题满分 12 分，其中第一小问 4 分，第二小问 8 分）

【解析】（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{e^x}$，$\therefore f'(x)=\frac{-x^2}{e^x}$，...1 分

$k_{切}=f'(-1)=-e$，..2 分

又 $f(-1)=e$，∴切点为$(-1,e)$ ....3 分

∴切线方程为 $y-e=-e(x+1)$，化简得 $ex+y=0$...4 分

（2）【解法一】当 $x\ge0$ 时，$f(x)\le2$ 恒成立，故$\frac{x^2+ax+a}{e^x}\le2$，

也就是$x^2+ax+a\le2e^x$，即 $a(x+1)\le2e^x-x^2$，

由 $x+1>0$ 得 $a\le\frac{2e^x-x^2}{x+1}$，..1 分

令 $h(x)=\frac{2e^x-x^2}{x+1}$（$x\ge0$），则$h'(x)=\frac{(2e^x-2x)(x+1)-(2e^x-x^2)}{(x+1)^2}=\frac{x(2e^x-x-2)}{(x+1)^2}$，..2 分

令 $t(x)=2e^x-x-2$，则$t'(x)=2e^x-1$，..3 分

可知$t'(x)$在$[0,+\infty)$单调递增，则$t'(x)\ge t'(0)=1$，即$t'(x)>0$ 在$(0,+\infty)$恒成立，..................4 分

故 $t(x)$在$[0,+\infty)$单调递增．..5 分

所以 $t(x)\ge t(0)=0$，故$h'(x)\ge0$ 在$[0,+\infty)$恒成立．...6 分

所以 $h(x)$在$[0,+\infty)$单调递增，而 $h(0)=2$，所以 $h(x)\geq 2$，......7 分

故 $a\leq 2$......8 分

【解法二】因为当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq 2$ 恒成立，故$f(x)_{\max}\leq 2$

由 $f'(x)=\frac{-x^2+(2-a)x}{e^x}=\frac{-x[x-(2-a)]}{e^x}$ $(x\geq 0)$，......1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2-a$，......2 分

①当 $2-a\leq 0$，即 $a\geq 2$ 时，$f'(x)\leq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore f(x)$在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore f(x)_{\max}=f(0)=\frac{a}{e^0}=a\geq 2$，......3 分

$\therefore$当 $a=2$ 时合题意，当 $a>2$ 时不合题意；......4 分

②当 $2-a>0$，即 $a<2$ 时，$f(x)$在 $x\in[0,2-a)$上单调递增，在 $x\in(2-a,+\infty)$上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(2-a)=\frac{4-a}{e^{2-a}}$，......5 分

设 $2-a=t>0$，$y=\frac{t+2}{e^t}$，则 $y'=\frac{-1-t}{e^t}<0$ 恒成立，$\therefore y=\frac{t+2}{e^t}$在$(0,+\infty)$上单调递减，......6 分

$\therefore y<y|_{t=0}=\frac{2}{e^0}=2$，即$f(x)_{\max}<2$，合题意；......7 分

综上，$a\leq 2$......8 分

【解法三】因为当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq 2$ 恒成立，也就是$x^2+ax+a\leq 2e^x$，

即 $2e^x-x^2-ax-a\geq 0$ 恒成立，

令$h(x)=2e^x-x^2-ax-a$，$x\in[0,+\infty)$，......1 分

$h'(x)=2e^x-2x-a$，$h''(x)=2e^x-2$

$\because x\geq 0$，$\therefore e^x\geq 1$，$\therefore h''(x)\geq 0$ 恒成立，$\therefore h'(x)$在 $x\in[0,+\infty)$上单调递增，......2 分

$\therefore h'(x)_{\min}=h'(0)=2-a$．......3 分

①当 $2-a\geq 0$，即 $a\leq 2$ 时，$h'(x)_{\min}\geq 0$，$\therefore h(x)$在 $x\in[0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(0)=2-a\geq 0$，合题意；......4 分

②当 $2-a<0$，即 $a>2$ 时，存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$h'(x_0)=0$，即 $2e^{x_0}=2x_0+a$......5 分

$\therefore h(x)$在 $x\in[0,x_0)$上单调递减，在 $x\in(x_0,+\infty)$上单调递增，......6 分

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=2e^{x_0}-x_0^2-ax_0-a=(2x_0+a)-x_0^2-ax_0-a=-x_0^2+(2-a)x_0<0$，不合题意．......7 分

综上，$a\leq 2$......8 分

21．（本小题满分 12 分，其中第一小问 4 分，第二小问 8 分）

【解析】（1）双曲线 C 的渐近线方程为 $bx+ay=0$ 和 $bx-ay=0$，......1 分

所以有 $\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$......2 分【注：点线距离公式正确可得此分】

由题意可得 $\frac{4b^2}{5}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，

又 $2c=2\sqrt{5}$，则 $c^2=a^2+b^2=5$，解得 $a=2$，$b=1$，......3 分【注：只需一个正确可得此分】

则双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$； ....4 分

（2）【解法一】当直线斜率不存在时，易知此时 $P(2,0)$，直线 l：$x=2$，

不妨设 $M(2,1)$，$N(2,-1)$，得 $S_{\triangle MON}=2$； ....1 分

当直线斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

与双曲线的方程 $x^2-4y^2=4$ 联立，可得 $(4k^2-1)x^2+8kmx+4m^2+4=0$，..................2 分

直线与双曲线的右支相切，可得 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2-1)(4m^2+4)=0$，故 $4k^2=m^2+1$ ...3 分

设直线 l 与 x 轴交于 D，则 $D(-\frac{m}{k},0)$， ....4 分

又双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ y=kx+m \end{cases}$，可得 $M(\frac{2m}{1-2k},\frac{m}{1-2k})$， ....5 分

同理可得 $N(-\frac{2m}{1+2k},\frac{m}{1+2k})$，

$S_{\triangle MON}=S_{\triangle MOD}+S_{\triangle NOD}=\frac{1}{2}|OD||y_M-y_N|=\left|\frac{-m}{2k}\right|\cdot|k|\cdot|x_M-x_N|$ ....6 分

$=\left|\frac{-m}{2k}\right|\cdot|k|\cdot\left|\frac{2m}{1+2k}+\frac{2m}{1-2k}\right|=\left|\frac{-m}{2k}\right|\cdot|k|\cdot\left|\frac{4m}{1-4k^2}\right|=\frac{2m^2}{m^2}=2$ ....7 分

综上，$\triangle MON$ 面积为 2． ....8 分

【解法二】当直线斜率不存在时，易知此时 $P(2,0)$，直线 l：$x=2$，

不妨设 $M(2,1)$，$N(2,-1)$，得 $S_{\triangle MON}=2$； ....1 分

当直线斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

与双曲线的方程 $x^2-4y^2=4$ 联立，可得 $(4k^2-1)x^2+8kmx+4m^2+4=0$，..................2 分

直线与双曲线的右支相切，可得 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2-1)(4m^2+4)=0$，故 $4k^2=m^2+1$ ...3 分

设直线 l 与 x 轴交于 D，则 $D(-\frac{m}{k},0)$， ....4 分

又双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ y=kx+m \end{cases}$，可得 $M(\frac{2m}{1-2k},\frac{m}{1-2k})$， ....5 分

同理可得 $N(-\frac{2m}{1+2k},\frac{m}{1+2k})$，

设渐近线 $y=\frac{1}{2}x$ 的倾斜角为 α 角则 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$ 6分

又 $\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ON}\right|=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\dfrac{-4m^2}{1-4k^2}+\dfrac{m^2}{1-4k^2}}{\cos 2\alpha}=\dfrac{3}{\cos 2\alpha}$

所以 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ON}\right|\sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{\cos 2\alpha}\times\sin 2\alpha=\dfrac{3}{2}\times\tan 2\alpha=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}=2$ 7分

综上，$\triangle MON$ 面积为2 . ...8 分

22.（本小题满分 12 分，其中第一小问 4 分，第二小问 8 分）

【解析】（1）设A_1 =“第 1 天选择米饭套餐”，A_2 =“第 2 天选择米饭套餐”，

$\overline{A_1}$ =“第 1 天不选择米饭套餐”. ....1 分

根据题意 $P(A_1)=\frac{2}{3}$，$\therefore P(\overline{A}_1)=\frac{1}{3}$，且 $P(A_2|A_1)=\frac{1}{4}$，$P(A_2|\overline{A}_1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ....2 分

由全概率公式，得 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$..3 分

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. ....4 分

(2)(i)设A_n =“第 n 天选择米饭套餐”，则$P_n=P(A_n)$，$P(\overline{A_n})=1-P_n$，

根据题意 $P(A_{n+1}|A_n)=\frac{1}{4}$，$P(A_{n+1}|\overline{A_n})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. ....1 分

由全概率公式，得 $P(A_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(\overline{A_n})P(A_{n+1}|\overline{A_n})$

$=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{2}(1-P_n)=-\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{2}$. ....2 分

即$P_{n+1}=-\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{2}$，因此$P_{n+1}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}(P_n-\frac{2}{5})$. ....3 分

因为$P_1-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\neq 0$，所以$\{P_n-\frac{2}{5}\}$是以$\frac{4}{15}$为首项，$-\frac{1}{4}$为公比的等比数列. ....4 分

(ii)由(i)可得$P_n=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}(-\frac{1}{4})^{n-1}$. ....5 分

当 n 为大于 1 的奇数时，$P_n=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}(\frac{1}{4})^{n-1}\le\frac{2}{5}+\frac{4}{15}(\frac{1}{4})^2=\frac{5}{12}$. ....6 分

当 n 为正偶数时，$P_n=\frac{2}{5}-\frac{4}{15}(\frac{1}{4})^{n-1}<\frac{2}{5}<\frac{5}{12}$. ....7 分

因此 $n\ge 2$ 当时，$P_n\le\frac{5}{12}$. ....8 分