

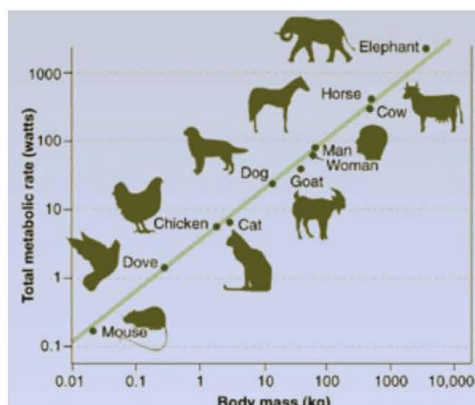
长沙市一中 2023 届高三三月考试卷（七）

数学

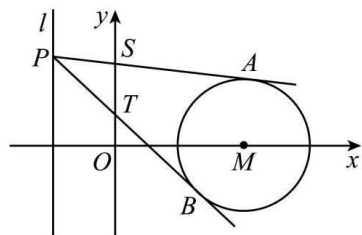
时量：120 分钟 满分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | 2x + 1 < 3\}$, $N = \{x | x < a\}$, 若 $M \cap N = N$, 则实数 a 的取值范围为 ()
- A. $[1, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 1)$
2. 若实数 x, y 满足 $(x+i)(3+yi) = 2+4i$, 则 $xy =$ ()
- A. -1 B. 1 C. 3 D. -3
3. 1947 年, 生物学家 Max Kleiber 发表了一篇题为《body size and metabolicrate》的论文, 在论文中提出了一个克莱伯定律: 对于哺乳动物, 其基础代谢率与体重的 $\frac{3}{4}$ 次幂成正比, 即 $F = c_0 M^{\frac{3}{4}}$, 其中 F 为基础代谢率, M 为体重. 若某哺乳动物经过一段时间生长, 其体重为原来的 10 倍, 则基础代谢率为原来的 (参考数据: $\sqrt[3]{10} \approx 1.7783$) ()



- A. 5.4 倍 B. 5.5 倍 C. 5.6 倍 D. 5.7 倍
4. 已知函数 $f(x) = |x| + \sin^2 x$, 设 $x_1, x_2 \in R$, 则 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立的一个必要不充分条件是 ()
- A. $x_1 > x_2$ B. $x_2 > x_1$
- C. $x_1 + x_2 > 0$ D. $|x_1| > x_2$
5. 如图, 圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 1$, 点 $P(-1, t)$ 为直线 $l: x = -1$ 上一动点, 过点 P 引圆 M 的两条切线, 切点分别为 A, B ; 若两条切线 PA, PB 与 y 轴分别交于 S, T 两点, 则 $|ST|$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

6. 某旅游景区有如图所示 A 至 H 共 8 个停车位, 现有 2 辆不同的白色车和 2 辆不同的黑色车, 要求相同颜色的车不停在同一行也不停在同一列, 则不同的停车方法总数为 ()

A	B	C	D
E	F	G	H

- A. 288 B. 336 C. 576 D. 1680

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的直线与抛物线相交于 A, B 两点, 以 AF, BF 为直径的圆分别与 x 轴交于异于 F 的 P, Q 两点, 若 $|PF| = 2|FQ|$, 则线段 $|AB|$ 的长为 ()

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{13}{2}$

8. 若正实数 a, b 满足 $a > b$, 且 $\ln a \cdot \ln b > 0$, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $\log_a b < 0$ B. $a - \frac{1}{b} > b - \frac{1}{a}$ C. $2^{ab+1} < 2^{a+b}$ D. $a^{b-1} < b^{a-1}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 定义函数 $f(x)$ 为 X 取值不超过 x 的概率, 即 $f(x) = P(X \leq x)$. 若 $x > 0$, 则下列说法正确的有 ()

- A. $f(-x) = 1 - f(x)$ B. $f(2x) = 2f(x)$
C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数 D. $P(|X| \leq x) = 2f(x) - 1$

10. 2022 年 9 月钱塘江多处出现罕见潮景“鱼鳞潮”, “鱼鳞潮”的形成需要两股涌潮, 一股是波状涌潮, 另外一股是破碎的涌潮, 两者相遇交叉就会形成像鱼鳞一样的涌潮. 若波状涌潮的图像近似函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A, \omega \in \mathbb{N}^*, |\varphi| < \frac{\pi}{3}$) 的图像, 而破碎的涌潮的图像近似 $f'(x)$ ($f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数) 的图像. 已知当 $x = 2\pi$ 时, 两潮有一个交叉点, 且破碎的涌潮的波谷为 -4 , 则 ()

- A. $\omega = 2$ B. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$
C. $f'\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数 D. $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 上单调

11. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, B_1D 与平面 ACD_1 相交于点 E , P 为 $\triangle ACD_1$ 内一点, 且

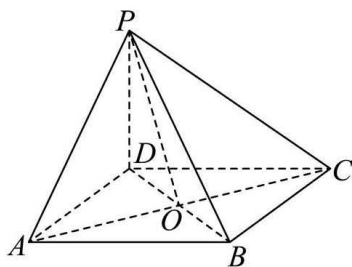
$S_{\triangle PBD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD_1}$, 设直线 PD 与 A_1C_1 所成的角为 θ , 则下列结论正确的是 ()

- A. $B_1D \perp PE$ B. 点 P 的轨迹是圆

- C. 点 P 的轨迹是椭圆
D. θ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \cdot e^{a_{n+1}} = e^{a_n} - 1$, 且 $a_1 = 1$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则下列结论正确的是 ()
- A. $a_n > 0$
B. $a_{n+1} > a_n$
C. $a_{2021} + a_{2023} > 2a_{2022}$
D. $S_{2023} > 2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设平面向量 \vec{a} , \vec{b} 的夹角为 60° , 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量是_____.
14. 若直线 $l: y = kx + b$ 为曲线 $f(x) = e^x$ 与曲线 $g(x) = e^2 \cdot \ln x$ 的公切线 (其中 e 为自然对数的底数, $e \approx 2.71828\dots$), 则实数 $b =$ _____.
15. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, O 为对角线 AC 与 BD 的交点, 若 $PD = 3$, $\angle APD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$, 则三棱锥 $P-AOD$ 的外接球的体积为_____.



16. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ 、两条渐近线的夹角正切值为 $2\sqrt{2}$, 则双曲线 E 的标准方程为_____; 若直线 $l: kx - y - 3k = 0$ 与双曲线 E 的右支交于 A, B 两点, 设 $\triangle F_1AB$ 的内心为 I , 则 $\triangle F_1AB$ 与 $\triangle IAB$ 的面积比值的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

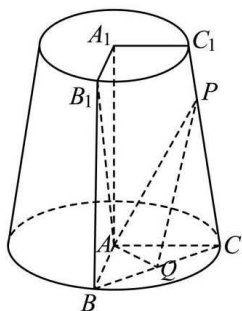
17. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $a+c=6$ ， $(3-\cos A)\sin B = \sin A(1+\cos B)$.

- (1) 求边 b 的大小；
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

18. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$ ， $a_1 = 1$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(2) 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{2+a_n}{a_n \cdot a_{n+1} \cdot b_{n+1}}$ ，若 $b_2 = 2$ ， $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 = 2^{10}$ ，求证： $c_1 + c_2 + \dots + c_n < 1$.

19. 在直角梯形 AA_1B_1B 中， $A_1B_1 \parallel AB$ ， $AA_1 \perp AB$ ， $AB = AA_1 = 2A_1B_1 = 6$ ，直角梯形 AA_1B_1B 绕直角边 AA_1 旋转一周得到如下图的圆台 A_1A ，已知点 P, Q 分别在线段 CC_1 ， BC 上，二面角 $B_1-AA_1-C_1$ 的大小为 θ .



(1) 若 $\theta = 120^\circ$ ， $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$ ， $AQ \perp AB$ ，证明： $PQ \parallel$ 平面 AA_1B_1B ；

(2) 若 $\theta = 90^\circ$ ，点 P 为 CC_1 上的动点，点 Q 为 BC 的中点，求 PQ 与平面 AA_1C_1C 所成最大角的正切值，并求此时二面角 $Q-AP-C$ 的余弦值.

20. 某学校为了弘扬中华优秀传统文化，组织开展中华优秀传统文化活动周，活动周期间举办中华优秀传统文化知识竞赛活动，以班级为单位参加比赛，每班通过中华优秀传统文化知识竞答活动，择优选拔 5 人代表班级参加年级比赛.年级比赛分为预赛与决赛二阶段进行，预赛阶段的赛制为：将两组中华优秀传统文化的们答题放在甲、乙两个纸箱中，甲箱有 5 个选择题和 3 个填空题，乙箱中有 4 个选择题和 3 个填空题，比赛中要求每个班级代表队在甲或乙两个纸箱中随机抽取两题作答.每个班级代表队先抽取一题作答，答完后试题不放回纸箱中，再抽取第二题作答，两题答题结束后，再将

这两个试题放回原纸箱中.

(1) 若 1 班代表队从甲箱中抽取了 2 个试题, 答题结束后错将题目放入了乙箱中, 接着 2 班代表队答题, 2 班代表队抽取第一题时, 从乙箱中抽取试题. 已知 2 班代表队从乙箱中取出的是选择题, 求 1 班代表队从甲箱中取出的是 2 个选择题的概率;

(2) 经过预赛, 成绩最好的 6 班代表队和 18 班代表队进入决赛, 决赛采用成语接龙的形式进行, 采用五局三胜制, 即两班代表队中先胜三局的代表队赢得这场比赛, 比赛结束. 已知第一局比赛 6 班代表队获胜的概率为 $\frac{3}{5}$, 18 班代表队胜的概率为 $\frac{2}{5}$, 且每一局的胜者在接下来一局获胜的概率为 $\frac{2}{5}$, 每局必分胜负. 记比赛结束时比赛局数为随机变量 X , 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(1) 若点 P 在曲线 C 上, 点 A, B 分别在双曲线 C 的两渐近线 l_1, l_2 上, 且点 A 在第一象限, 点 B 在第四象限,

若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值;

(2) 设双曲线 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过左焦点 F_1 作直线 l 交双曲线的左支于 G, Q 两点, 求 $\triangle GQF_2$ 周长的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = (x+n)\ln x$.

(1) 若 $n=1$, 求函数 $g(x) = f(x) - k(x-1)$ ($k > 2$) 的零点个数, 并说明理由;

(2) 当 $n=0$ 时, 若方程 $f(x) = b$ 有两个实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求证: $be+1 < x_2 - x_1 < \frac{e^{-3} + 2 + 3b}{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

