

2022 ~ 2023 学年佛山市普通高中教学质量检测(二)

高三数学

2023.4

本试卷共 1 页, 22 小题, 满分 150 分, 考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上; 将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔在答题卡上对应题目后面的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液, 不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁, 考试结束后, 请将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | -3 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 > 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 A. $(2, 3]$ B. $[-3, +\infty)$ C. $[-3, -2) \cup (2, 3]$ D. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
2. 已知 $\square ABCD$ 的顶点 $A(-1, -2)$, $B(3, -1)$, $C(5, 6)$, 则顶点 D 的坐标为 (\quad)
 A. $(1, 4)$ B. $(1, 5)$ C. $(2, 4)$ D. $(2, 5)$
3. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 “ $S_3 = 3a_2$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 为等差数列” 的 (\quad)
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. “基础学科拔尖学生培养试验计划” 简称“珠峰计划”, 是国家为回应“钱学森之问”而推出的一项人才培养计划, 旨在培养中国自己的学术大师. 已知浙江大学、复旦大学、武汉大学、中山大学均有开设数学学科拔尖学生培养基地, 某班级有 5 位同学从中任选一所学校作为奋斗目标, 则每所学校至少有一位同学选择的不同方法数共有 (\quad)
 A. 120 种 B. 180 种 C. 240 种 D. 300 种
5. 科技是一个国家强盛之根, 创新是一个民族进步之魂, 科技创新铸就国之重器. 极目一号(如图 1)是中国科学院空天信息研究院自主研发的系留浮空器. 2022 年 5 月, “极目一号” III 型浮空艇成功完成 10 次升空大气科学观测, 最高升空至 9050 米, 超过珠穆朗玛峰, 创造了浮空艇大气科学观测海拔最高的世界纪录, 彰显了中国的实力. “极目一号” III 型浮空艇长 55 米, 高 19 米, 若将它近似看作一个半球、一个圆柱和一个圆台的组合体, 正视图如图 2 所示, 则极目一号体积约为 (\quad)
 (参考数据: $9.5^2 \approx 90$, $9.5^3 \approx 857$, $315 \times 1005 \approx 316600$)



图 1

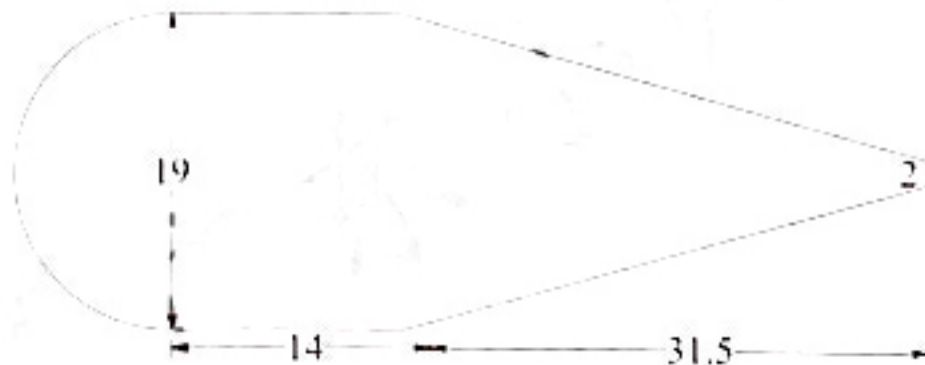


图 2

- A. 9064 m^3 B. 9004 m^3 C. 8944 m^3 D. 8884 m^3

6. 已知方程 $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, 其中 $A \geq B \geq C \geq D \geq E \geq F$. 现有四位同学对该方程进行了判断, 提出了四个命题:

- 甲: 可以是圆的方程; 乙: 可以是抛物线的方程;
丙: 可以是椭圆的标准方程; 丁: 可以是双曲线的标准方程.

其中, 真命题有()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

7. 若斜率为1的直线 l 与曲线 $y = \ln(x+a)$ 和圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 都相切, 则实数 a 的值为()

- A. -1 B. 0 C. 2 D. 0或2

8. 已知函数 $f(x) = \sin(2x+\varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 若存在 $x_1, x_2, x_3 \in (0, \frac{3\pi}{2})$, 且 $x_3 - x_2 = 2(x_2 - x_1) = 4x_1$, 使

$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) > 0$, 则 φ 的值为()

- A. $-\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $-\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 有选错的得0分, 部分选对的得2分.

9. 设 z, z_1, z_2 为复数, 且 $z_1 \neq z_2$, 下列命题中正确的是()

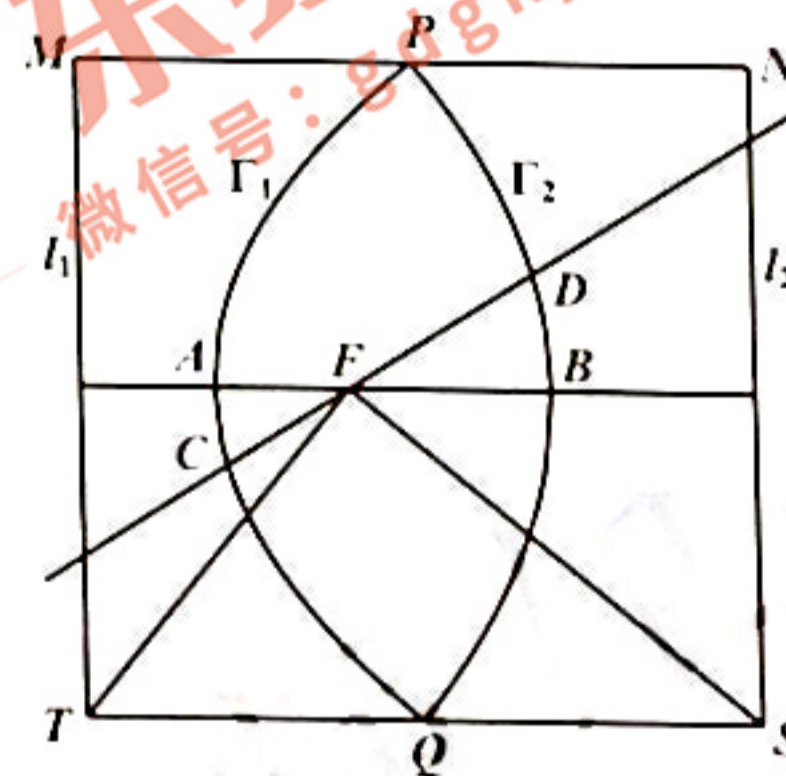
- A. 若 $\overline{z_1} = z_2$, 则 $z_1 = \overline{z_2}$ B. 若 $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, 则 $z_1 z_2 = 0$
C. 若 $zz_1 = zz_2$, 则 $z = 0$ D. 若 $|z - z_1| = |z - z_2|$, 则 z 在复平面对应的点在一条直线上

10. 四面体 $ABCD$ 中, $AB \perp BD, CD \perp BD, AB = 3, BD = 2, CD = 4$, 平面 ABD 与平面 BCD 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 AC 的值可能为()

- A. $\sqrt{17}$ B. $\sqrt{23}$ C. $\sqrt{35}$ D. $\sqrt{41}$

11. 如图抛物线 Γ_1 的顶点为 A , 焦点为 F , 准线为 l_1 , 焦准距为4; 抛物线 Γ_2 的顶点为 B , 焦点也为 F , 准线为 l_2 , 焦准距为6. Γ_1 和 Γ_2 交于 P, Q 两点, 分别过 P, Q 作直线与两准线垂直, 垂足分别为 M, N, S, T , 过 F 的直线与封闭曲线 $APBQ$ 交于 C, D 两点, 则()

- A. $|AB| = 5$ B. 四边形 $MNST$ 的面积为100
C. $\overrightarrow{FS} \cdot \overrightarrow{FT} = 0$ D. $|CD|$ 的取值范围为 $[5, \frac{25}{3}]$



12. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1$, 对于任意的实数 a, b , 下列结论一定成立的有()

- A. 若 $a+b > 0$, 则 $f(a) + f(b) > 0$ B. 若 $a+b > 0$, 则 $f(a) - f(-b) > 0$
C. 若 $f(a) + f(b) > 0$, 则 $a+b > 0$ D. 若 $f(a) + f(b) < 0$, 则 $a+b < 0$

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分, 其中第16题, 第一空2分, 第二空3分.

13. 已知函数 $f(x) = x^3 - x$ 有2个极值点 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 + f(x_1) + f(x_2) =$ _____.

14. 佛山被誉为“南国陶都”，拥有上千年的制陶史，佛山瓷砖享誉海内外，某企业瓷砖生产线上生产的瓷砖某项指标 $X \sim N(800, \sigma^2)$ ，且 $P(X < 801) = 0.6$ ，现从该生产线上随机抽取 10 片瓷砖，记 Y 表示 $800 \leq X < 801$ 的瓷砖片数，则 $E(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点， P 是过椭圆右顶点且与长轴垂直的直线上的动点，则 $\sin \angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

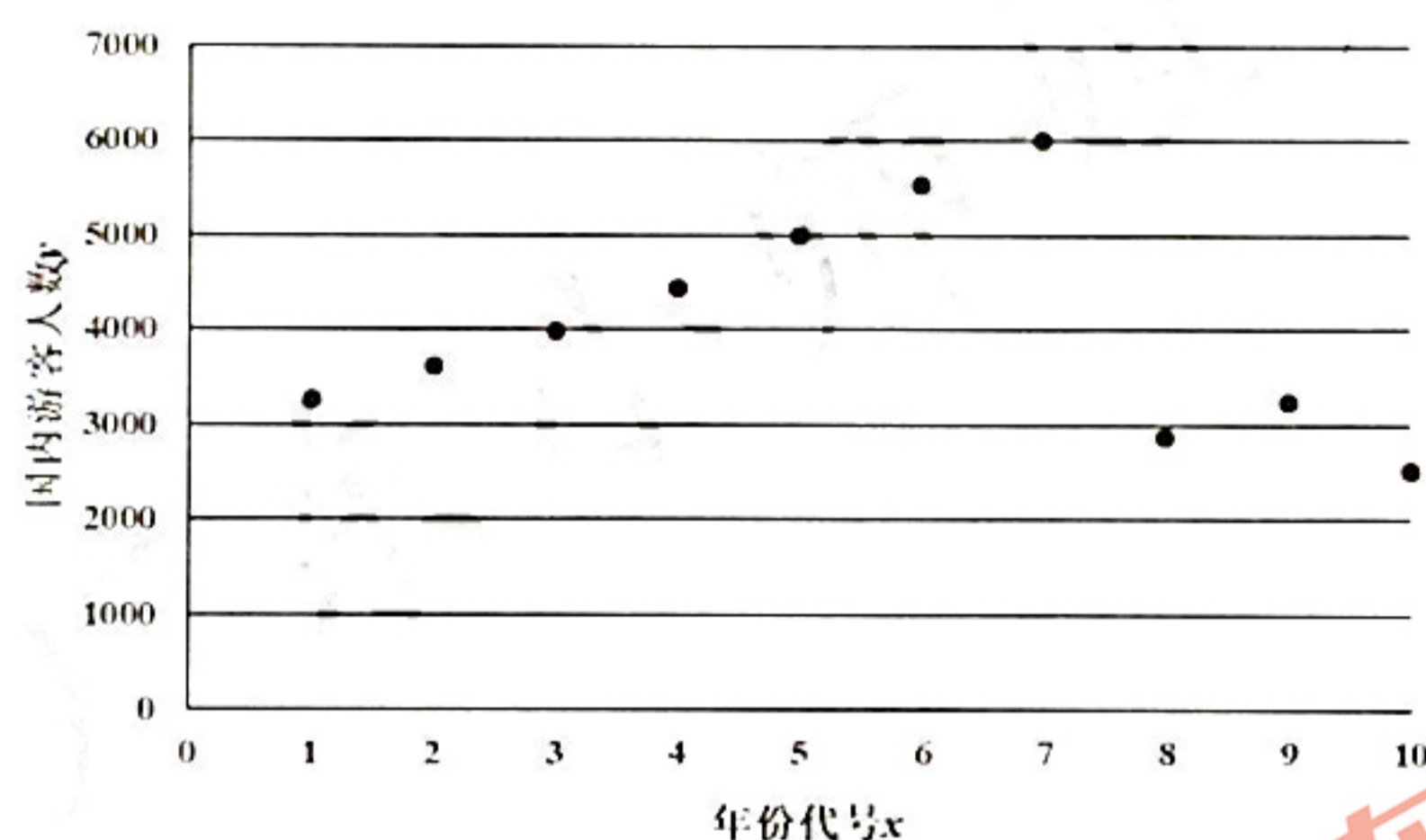
16. 有 n 个编号分别为 $1, 2, \dots, n$ 的盒子，第 1 个盒子中有 2 个白球 1 个黑球，其余盒子中均为 1 个白球 1 个黑球，现从第 1 个盒子中任取一球放入第 2 个盒子，再从第 2 个盒子中任取一球放入第 3 个盒子，以此类推，则从第 2 个盒子中取到白球的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，从第 n 个盒子中取到白球的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

2023 年 3 月 5 日，国务院总理李克强在政府工作报告中指出“着力扩大消费和有效投资，面对需求不足甚至出现收缩，推动消费尽快恢复，帮扶旅游业发展，围绕补短板、调结构、增后劲扩大有效投资。”某旅游公司为确定接下来五年的发展规划，对 2013~2022 这十年的国内旅客人数作了初步处理，用 x_i 和 y_i 分别表示第 i 年的年份代号和国内游客人数（单位：百万人次），得到下面的表格与散点图。

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年份代号 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
国内游客数 y	3262	3611	3990	4432	5000	5542	6006	2879	3246	2530



(1) 2020 年~2022 年疫情特殊时期，旅游业受到重挫，现剔除这三年的数据，再根据剩余样本数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, \dots, 7$) 建立国内游客人数 y 关于年份代号 x 的一元线性回归模型；

(2) 2023 年春节期间旅游市场繁荣火爆，预计 2023 年国内旅游人数约 4550 百万人次，假若 2024 年~2027 年能延续 2013 年~2019 年的增长势头，请结合以上信息预测 2027 年国内游客人数。

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

参考数据： $\sum_{i=1}^7 y_i = 31843$ ， $\sum_{i=1}^7 (x_i - 4)(y_i - 4549) = 13104$

18. (12分)

已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $\cos A + \sin B = \sqrt{3}(\sin A + \cos B)$.

(1) 若 $C = \frac{\pi}{3}$, 求 A ;

(2) 已知点 D 在边 AC 上, 且 $AD = BD = 2$, 求 CD 的取值范围.

19. (12分)

已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = a_{n+2} - 6$.

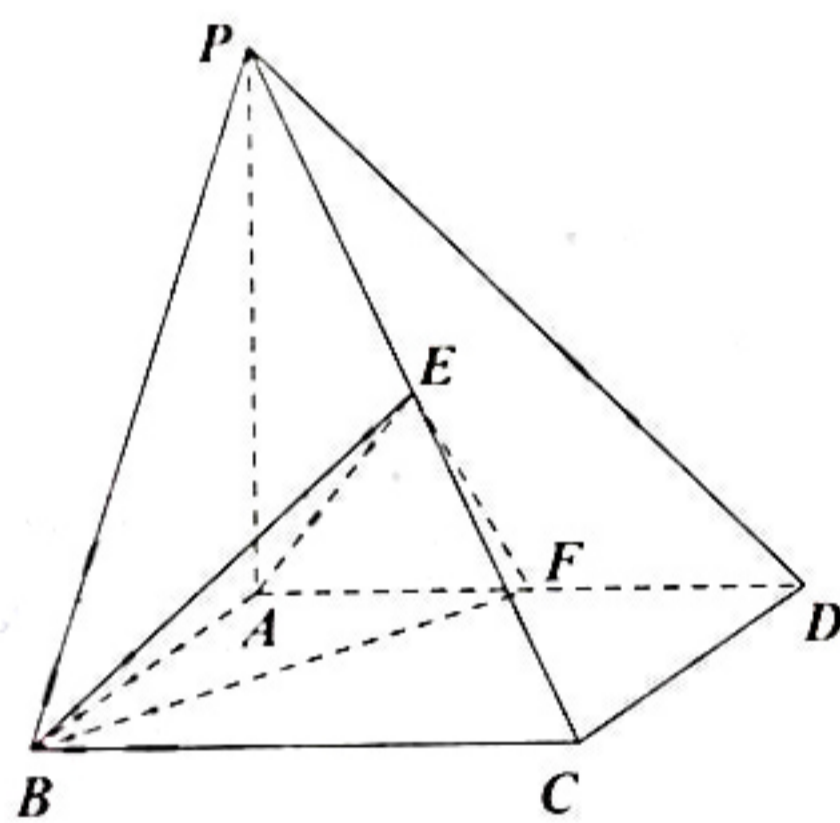
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 b_m 为数列 $\{S_n\}$ 在区间 (a_m, a_{m+2}) 中最大的项, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. (12分)

中国正在由“制造大国”向“制造强国”迈进, 企业不仅仅需要大批技术过硬的技术工人, 更需要努力培育工人们执着专注、精益求精、一丝不苟、追求卓越的工匠精神, 这是传承工艺、革新技术的重要基石. 如图所示的一块木料中, $ABCD$ 是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB = 2$, 点 E, F 是 PC, AD 的中点.

- 若要经过点 E 和棱 AB 将木料锯开, 在木料表面应该怎样画线, 请说明理由并计算截面周长;
- 若要经过点 B, E, F 将木料锯开, 在木料表面应该怎样画线, 请说明理由.



21. (12分)

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左顶点为 A , 焦距为 4, 过右焦点 F 作垂直于实轴的直线交 C

于 B, D 两点, 且 $\triangle ABD$ 是直角三角形.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) M, N 是 C 右支上的两动点, 设直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 k_2 = -2$, 求点 A 到直线 MN 的距离 d 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{a}e^x - 3x$, 其中 $a \neq 0$.

(1) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x) \geq a(1 - 2\sin x)$, 求 a 的取值范围.