中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

理科数学试卷（一卷）参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	D	B	B	B	C	B	A	A	A	B

二、填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分．

13． $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$

14． $\left[0,\frac{\pi}{3}\right],\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

15． $\frac{2}{7}\sqrt{21}$

16． $a\in(0,1)\cup(3,+\infty)$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．解：

（1）$\because a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$，$\therefore S_n-a_n=S_{n-1}$，则 $S_{n-1}=(n-1)^2(n\geq 2)$，

即 $S_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$ ……………3 分

$\therefore a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geq 2)$ ……………5 分

经检验 $a_1=1$ 适合，$\therefore a_n=2n-1$ ……………6 分

（2）易知 $b_n>0$，$\because b_n=\frac{2^{2n-1}}{n^4}$，$b_{n+1}=\frac{2^{2n+1}}{(n+1)^4}$，

$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^2n^4}{(n+1)^4}=\left(\frac{\sqrt{2}n}{n+1}\right)^4$ ……………8 分

当 $\frac{\sqrt{2}n}{n+1}>1$ 时，$n>\sqrt{2}+1$，

所以当$1\le n<3$时，$b_n>b_{n+1}$，当$n\ge 3$时，$b_n<b_{n+1}$……………10 分

又$b_2=\dfrac{1}{2},b_3=\dfrac{32}{81}$，所以当$n=3$时，$b_n$有最小值$\dfrac{32}{81}$……………12 分

18．解：

（1）证明：设平面$PAD\cap$平面$PBC=l$，

$\because AD//BC$，$BC\not\subset$平面PAD，$AD\subset$平面PAD，$\therefore BC//$平面PAD，

又$\because BC\subset$平面PBC，$\therefore BC//l$……………2 分

$\because \angle PBC=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore PB\perp BC$，$\therefore PB\perp l$……………4 分

又因为平面$PAD\perp$平面PBC，$\therefore PB\perp$平面PAD，可得$PB\perp PA$，得证.

……………6 分

（2）解：连结BD，在$\triangle BCD$中，易得$BD=\sqrt{3}$，$\therefore BD\perp BC$，

又$\because PB\perp BC$，$\therefore \angle PBD$为二面角$P-BC-A$的平面角……………8 分

以D为原点，分别以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}$的方向为$x$轴，$y$轴正方向，建立空间直角坐标系，

$\therefore A(2,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，

$\because BC\perp BD,BC\perp PD,BD\cap PD=D$，$\therefore BC\perp$平面$PBD$，

所以平面$PBD\perp$平面$ABCD$……………9 分

可设$P(0,y,z)$．由$PA=2PC$可得：

$(0-2)^2+y^2+z^2=4(0+1)^2+4(y-\sqrt{3})^2+4z^2$，

化简可得：$3y^2-8\sqrt{3}y+3z^2+12=0$…①

由（1）知$PB\perp PA$，$\therefore(-2,y,z)\cdot(0,y-\sqrt{3},z)=0$，化简得$y^2-\sqrt{3}y+z^2=0$…②

解方程①②可得$y=\dfrac{4}{5}\sqrt{3}$，$z=\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$……………11 分

$\therefore \sin\angle PBD=\dfrac{z}{PB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则$\cos\angle PBD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$……………12 分

19．解：

（1）甲是无放回地抽取，甲至多抽到一个黑球：基本事件{没有抽到黑球，抽到一个黑球}，

$\therefore P\{没有抽到黑球\}=\dfrac{C_7^4}{C_{10}^4}=\dfrac{35}{210}=\dfrac{1}{6}$ ……………1 分

$P\{抽到一个黑球\}=\dfrac{C_7^3C_3^1}{C_{10}^4}=\dfrac{105}{210}=\dfrac{1}{2}$ ……………2 分

所以甲至多抽到一个黑球的概率为：$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$ ……………5 分

（2）解法一：

乙是有放回地抽取，抽到白球得 10 分，抽到黑球得 20 分，

所以抽取 4 次{4 个白球，3 个白球 1 个黑球，2 个白球 2 个黑球，1 个白球 3 个黑球，4 个黑球}，

对应的 X 取值有 $\{40,50,60,70,80\}$；而每次抽到白球、黑球的概率分别为 $\dfrac{7}{10},\dfrac{3}{10}$，

设 4 次取球取得黑球次数为 r，则 r 的可能取值 $0,1,2,3,4$ ……………6 分

$\therefore P(X=40+10r)=C_4^r\left(\dfrac{7}{10}\right)^{4-r}\left(\dfrac{3}{10}\right)^r$，即可得分布列如下：

X	40	50	60	70	80
P	$\dfrac{2401}{10000}$	$\dfrac{4116}{10000}$	$\dfrac{2646}{10000}$	$\dfrac{756}{10000}$	$\dfrac{81}{10000}$

……………10 分

$\therefore E(X)=40\times\dfrac{2401}{10000}+50\times\dfrac{4116}{10000}+60\times\dfrac{2646}{10000}+70\times\dfrac{756}{10000}+80\times\dfrac{81}{10000}=52$

……………12 分

解法二：

设 4 次取球取得黑球数为 Y，则 $X=40+10Y$，且 $Y\sim B\left(4,\dfrac{3}{10}\right)$ ……………8 分

$EX=40+10EY=40+10\times4\times\dfrac{3}{10}=52$ ……………12 分

20．解：

（1）椭圆的右焦点 $F(2,0)$，

设 AB 所在的直线的方程为 $y=k(x-2)$（$k\neq 0$），且 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

……………1 分

联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ \dfrac{x^2}{5}+y^2=1, \end{cases}$ 可得：$(5k^2+1)x^2-20k^2x+(20k^2-5)=0$

……………3 分

则 $x_1+x_2=\dfrac{20k^2}{5k^2+1},x_1x_2=\dfrac{20k^2-5}{5k^2+1}$，点 N 的坐标为 $\left(\dfrac{10k^2}{5k^2+1},\dfrac{-2k}{5k^2+1}\right)$，

$\therefore ON$ 所在的直线的方程为 $y=-\dfrac{1}{5k}x$ ……………5 分

椭圆 C 在 A,B 处的切线方程分别为 $\dfrac{x_1x}{5}+y_1y=1,\dfrac{x_2x}{5}+y_2y=1$，

联立方程组 $\begin{cases} \dfrac{x_1x}{5}+y_1y=1, \\ \dfrac{x_2x}{5}+y_2y=1, \end{cases}$

解得点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{5(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1},\dfrac{x_1-x_2}{x_1y_2-x_2y_1}\right),M\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2k}\right)$，

所以点 M 的坐标满足直线 ON 的方程 $y=-\dfrac{1}{5k}x$，故 O,M,N 三点共线

……………7 分

（2）由（1）可知，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{5}(1+k^2)}{5k^2+1}$ ……………8 分

$|FM|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{5}{2}-2\right|=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{2|k|}$ ……………9 分

$|FN|=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{10k^2}{5k^2+1}-2\right|=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}}{5k^2+1}$ ……………10 分

$\therefore \dfrac{|AB|\cdot|FM|}{|FN|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\dfrac{k^2+1}{|k|}\geq\sqrt{5}$，

当且仅当 $|k|=1$ 时，等号成立……………12 分

21．解：

（1）$f(x)=\ln(x+1)-ax, f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a$ ……………1 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a\ge 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$\therefore f(x)>f(0)=0$，不符合题意，

……………2 分

②当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a\ge 0 \Leftrightarrow 0<x\le \dfrac{1}{a}-1$，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}-1\right)$ 上递增，在 $\left(\dfrac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 上递减，

$\because f\left(\dfrac{1}{a}-1\right)>f(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，满足题意……………4 分

③当 $a\ge 1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a<0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，$\therefore f(x)<f(0)=0$，不符合题意.

……………6 分

综上所述，a 的取值范围是 $(0,1)$.

（2）由（1）知 $0<a<1, \therefore a=\dfrac{\ln(x_0+1)}{x_0}$，

要证明 $x_0>2\left(\dfrac{1}{a}-1\right)$，只要证明 $\ln(x_0+1)>\dfrac{2x_0}{x_0+2}$ ……………7 分

设 $g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}, x>0$，

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\ge 0,$$

$g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}>g(0)=0$，即 $x_0>2\left(\dfrac{1}{a}-1\right)$ ……………9 分

另一方面：证法一：要证明 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$，只要证明 $\ln(x_0+1) < \frac{1}{a}$，

即证明 $\ln(x_0+1) < \frac{x_0}{\ln(x_0+1)}$ ……………10 分

$\because \ln\left(x_0+1\right) > 0$，即证 $\ln\left(x_0+1\right) < \sqrt{x_0}$，

设 $h(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x}, x > 0$，

则 $h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$，

所以当 $x > 0$ 时，$h(x) < h(0) = 0$，即 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$ ……………12 分

证法二：因为在 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}-1, +\infty\right)$ 上递减，且 $e^{\frac{1}{a}} - 1 > \frac{1}{a} - 1, x_0 > \frac{1}{a} - 1$，

要证明 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$，只要证明 $f(x_0) > f\left(e^{\frac{1}{a}} - 1\right)$，即证 $\frac{1}{a} - ae^{\frac{1}{a}} + a < 0$

……………10 分

设 $\varphi(x) = \frac{x^2+1}{e^x}, x > 1, \varphi'(x) = \frac{-(x-1)^2}{e^x} < 0$，

$\therefore \varphi(x) = \frac{x^2+1}{e^x} < \varphi(1) = \frac{2}{e} < 1$，

所以当 $x > 1$ 时，$e^x > x^2 + 1$，

即当 $0 < a < 1$ 时，$e^{\frac{1}{a}} > \frac{1}{a^2} + 1$，

$\therefore x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$ ……………12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题．作答如果多做，则按所做的第一题计分．

22．解：

（1）曲线 C_2 的普通方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ……………2 分

（2）由曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{4k}{1+k^2}, \\ y=\dfrac{2\left(1-k^2\right)}{1+k^2}, \end{cases}$（$k$ 为参数），

得曲线 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，

它是一个以 $C(2,0)$ 为圆心，半径等于 2 的圆，

……………4 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{3+\cos 2\theta-\sin^2\theta}}$．

$\therefore \rho^2(3+\cos 2\theta-\sin^2\theta)=4$，可得 $4x^2+y^2=4$……………6 分

则曲线 C_2 的参数方程为：$\begin{cases} x=\cos\beta, \\ y=2\sin\beta, \end{cases}$（$\beta$ 为参数），

$\because A$ 是曲线 C_1 上的点，B 是曲线 C_2 上的点，$\therefore |AB|_{\max}=|BC|_{\max}+2$

……………8 分

设 $B(\cos\beta, 2\sin\beta)$，则 $|BC|=\sqrt{(\cos\beta-2)^2+4\sin^2\beta}=\sqrt{-3\cos^2\beta-4\cos\beta+8}$

$=\sqrt{-3\left(\cos\beta+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{28}{3}}$，

当 $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$ 时，$|BC|_{\max}=\sqrt{\dfrac{28}{3}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，$\therefore |AB|_{\max}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}+2$……………10 分

23．解：

（1）$f(x)=|x-a|+|x+b|+c\ge|x-a-x-b|+c=|a+b|+c=a+b+c=1$

……………2 分

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)\left(2a^2+3b^2+6c^2\right)\ge\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}a+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}b+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}c\right)^2=1$，

$\therefore 2a^2+3b^2+6c^2\ge1$，即 $2a^2+3b^2+6c^2$ 的最小值为 1……………5 分

（2）$\because \sqrt{a^2+ab+b^2}=\sqrt{\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{3}b}{2}\right)$……………7 分

$$\therefore \sqrt{b^2+bc+c^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(b+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}c}{2}\right), \sqrt{c^2+ca+a^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(c+\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\right),$$

因此 $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+b+c+\frac{a+b+c}{2}+\frac{a+b+c}{2}\times\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>\frac{3}{2}$$ ……………10 分