绝密★启用前

湘豫名校联考
2023年4月高三第二次模拟考试
数学(文科)

注意事项:

1. 本试卷共6页。时间120分钟,满分150分。答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置,并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上,然后认真核对条形码上的信息,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。作答非选择题时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。来源:高三答案公众号
3. 考试结束后,将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\in \mathbf{Z}\left|\frac{x+1}{x-4}\leqslant 0\right.\right\}$,$B=\{y|y=3^x+1\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $(1,4)$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1+2\mathrm{i})z=(3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$,则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知函数 $f(x)=x+f'(2)\ln x+2$,则 $f'(2)=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

4. 设 m,n,l 分别是三条不同的直线,α 是平面,则下列结论中正确的是

A. 若 $m\perp n,m\perp l,n\subset\alpha,l\subset\alpha$,则 $m\perp\alpha$　　B. 若 $m\perp n,n\subset\alpha$,则 $m\perp\alpha$

C. 若 $m/\!/n,n\perp\alpha$,则 $m\perp\alpha$　　D. 若 $m/\!/\alpha,n\subset\alpha$,则 $m/\!/n$

5. 有两个质地均匀、大小相同的正四面体玩具,每个玩具的各面上分别写有数字1,2,3,4.同时抛掷两个玩具,则朝下的面的数字之积是3的倍数的概

率为

A. $\frac{3}{16}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{5}{16}$　　D. $\frac{7}{16}$

6. 某公司为了解本公司的用电情况，统计了 4 天气温 x(℃)与用电量 y(度)之间的相关数据如下表所示：

x	9	12	15	18
y	60	m	30	20

若它们之间的线性回归方程为 $\hat{y}=-\frac{14}{3}x+103$，则 $m=$

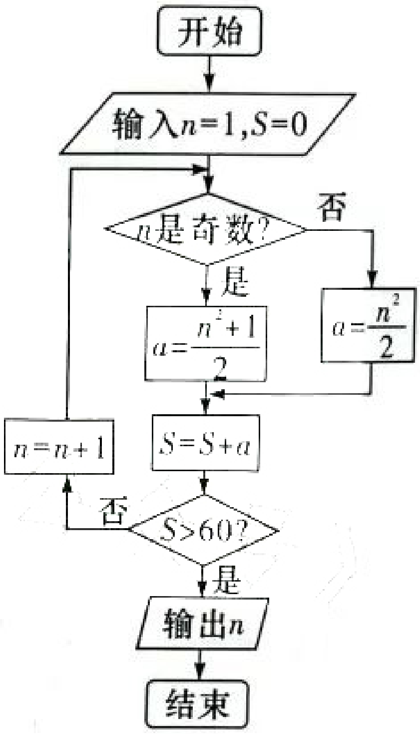
A. 48　　B. 50

C. 52　　D. 54

7. 执行如图所示的程序框图，输出的 $n=$

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8



8. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点，直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点，横坐标为 $-\frac{1}{2}$ 的点 P 在直线 l 上，且满足 $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$，则 $\frac{|BF|}{|AF|}=$

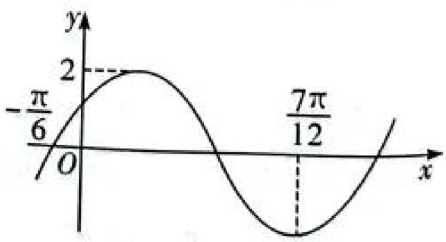
A. 2　　B. 3

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $(\sqrt{n^2-1}+1)S_n=nS_{n-1}+a_n(n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$，若 $S_k=\frac{1}{35}$，则 $k=$

A. 46　　B. 49　　C. 52　　D. 55

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列说法中正确的是



A. $\varphi=\frac{\pi}{8}$

B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 中心对称

C. 若 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{7\pi}{24},a\right)$ 上存在最大值，则实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{12},+\infty\right)$

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

11. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 A，直线 $l:9x-10y-57=0$ 与椭圆 C 相交于 P,Q 两点，线段 PQ 的中点为 B，直线 AB 恰好经过椭圆 C 的右焦点 F，且 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{FB}$，则椭圆 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

12. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$，点 E,F 分别在 AD,CD 上，且 $EF/\!/AC$，将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置，则当五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积最大时，三棱锥 $D'-DEF$ 外接球的表面积为

A. 4π　　B. $\frac{40}{9}\pi$　　C. $\frac{14}{3}\pi$　　D. 5π

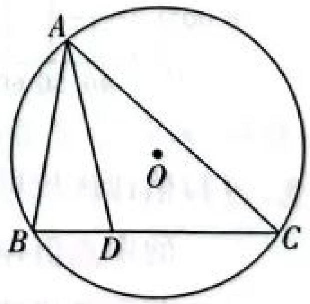
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,2)$，$\boldsymbol{b}=(-x,1)$，且 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{26}$，则实数 $x=$ ________.

14. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y-9\leqslant 0,\\x-y+3\geqslant 0,\\y-2\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x^2+y^2$ 的取值范围是________.

15. 已知函数 $f(x)$ 满足：对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<2$ 恒成立. 若 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(a)>2a$，则实数 a 的取值范围是________.

16. 如图，已知锐角 $\triangle ABC$ 为圆 O 的内接三角形，圆 O 的半径为 R，且 $BC=\sqrt{3}R$，$\angle BAC$ 的平分线交边 BC 于点 D，且点 D 为边 BC 上靠近点 B 的三等分点，$AD=\sqrt{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(本小题满分 12 分)

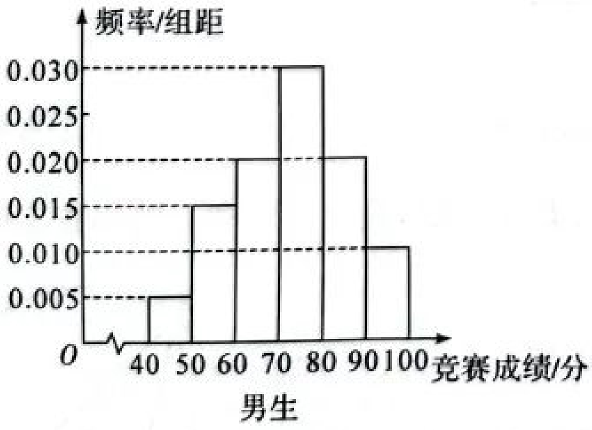
已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n\neq0$，$(1+3a_1)(1+3a_2)(1+3a_3)\cdots(1+3a_n)=a_n(n\in \mathbf{N}^*)$.

(1)证明：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列；

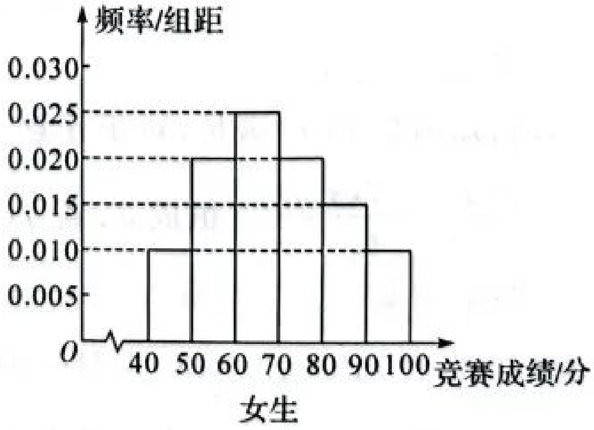
(2)求数列$\{a_na_{n+1}\}$的前 n 项和 T_n.

18.(本小题满分 12 分)

2022 年 10 月 12 日，"天宫课堂"第三课在中国空间站开讲，新晋"太空教师"刘洋用 2 米长的吸管成功喝到了芒果汁. 这是中国航天员首次在问天实验舱内进行授课，并通过网络向全国进行直播，这场直播极大地激发了广大中学生对航天知识的兴趣. 为领悟航天精神，感受中国梦想，某校高一年级组织了一次"寻梦天宫"航天知识竞赛活动. 为了解男生和女生对航天知识的掌握情况，该校随机抽取了 100 名男生和 100 名女生的竞赛成绩(满分 100 分)作为样本数据，并将数据分成 6 组：[40,50)，[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100]，整理得到如下频率分布直方图.



男生



女生

(1)估计该校男生和女生竞赛成绩的平均数；(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(2)若竞赛成绩为 70 分或 70 分以上的学生称为"太空达人"，完善 2×2 列

联表，并判断：是否有 95%的把握认为是否获得“太空达人”称号与性别有关？来源：高三答案公众号

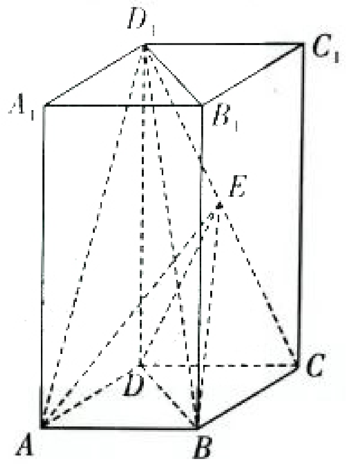
	非“太空达人”	“太空达人”	总计
男生			
女生			
总计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$AA_1=2AB=2$，$\angle BAD=60°$，平面 $BB_1D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\perp BD_1$，$DD_1\perp BD$，E 为 CD_1 上的一点.



(1)求证：$AD\perp$ 平面 BB_1D_1D；

(2)若 $AD_1\parallel$ 平面 BDE，求三棱锥 $E-ABD_1$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，离心率为 2，且过点 $P(2,3)$.

(1)求双曲线 E 的标准方程；

(2)设过原点 O 的直线 l_1 在第一、三象限内分别交双曲线 E 于 A，C 两点，过原点 O 的直线 l_2 在第二、四象限内分别交双曲线 E 于 B，D 两点，若直线 AD 过双曲线的右焦点 F，求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=m\ln x+x+\dfrac{m+1}{x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)当 $m=1$ 时,证明:$x^2f(x)<e^x+x^3$.

(二)选考题:共 10 分.请考生在 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分 10 分)**选修 4—4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=4+t, \\ y=2+t \end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.动点 M 到定点 $N(1,0)$ 的距离为 $\sqrt{2}$,记动点 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求直线 l 的普通方程,曲线 C 的直角坐标方程与极坐标方程;

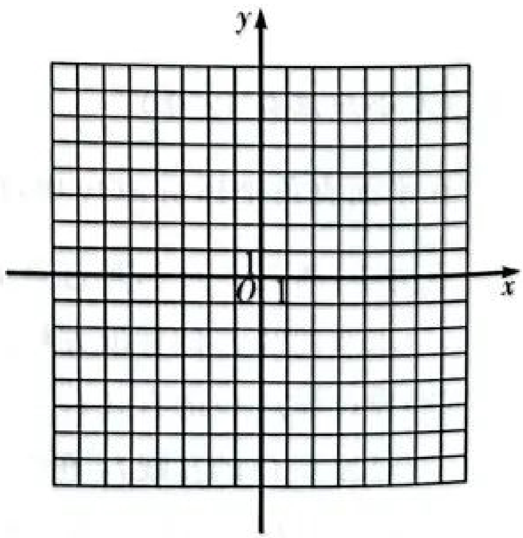
(2)设点 $P(1,-1)$,且直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,求 $|PA|\cdot\left(|PB|+\dfrac{1}{|PB|}\right)+|PB|\cdot\left(|PA|+\dfrac{1}{|PA|}\right)$ 的值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4—5:不等式选讲**

设函数 $f(x)=|x+1|-3|x-1|$.

(1)作出函数 $f(x)$ 的图象,并求 $f(x)$ 的值域;

(2)若存在 x,使得不等式 $f(x)\geqslant|4x-a|$ 成立,求实数 a 的取值范围.



湘豫名校联考
2023年4月高三第二次模拟考试
数学(文科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	A	C	D	B	C	A	B	C	D	B

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. A 【命题意图】本题考查不等式的求解和集合的交集运算，考查逻辑推理能力和数学运算的核心素养．

【解析】由$\frac{x+1}{x-4}\leqslant 0$，得$-1\leqslant x<4$，所以集合$A=\{-1,0,1,2,3\}$．又因为$B=\{y|y>1\}$，所以$A\cap B=\{2,3\}$．故选A．

2. D 【命题意图】本题考查复数乘法、除法运算，考查数学运算的核心素养．

【解析】因为$(3-i)(1+i)=4+2i$，所以$z=\frac{4+2i}{1+2i}=\frac{(4+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{8-6i}{5}$，所以$z$在复平面内对应的点的坐标为$\left(\frac{8}{5},-\frac{6}{5}\right)$，位于第四象限．故选D．

3. A 【命题意图】本题考查导数的运算．考查数学运算的核心素养．

【解析】因为$f(x)=x+f'(2)\ln x+2$，所以$f'(x)=1+\frac{f'(2)}{x}$．所以$f'(2)=1+\frac{f'(2)}{2}$，解得$f'(2)=2$．故选A．

4. C 【命题意图】本题考查直线与直线、直线与平面的位置关系，考查直观想象、逻辑推理的核心素养．

【解析】A选项，当$n\parallel l$时，直线m可能不垂直于平面α，A错误；B选项，当m,n异面时，也存在平面α，使得$m\perp n,n\subset\alpha,m\parallel\alpha$，B错误；C选项，由线面垂直的性质可知，当$m\parallel n,n\perp\alpha$时，必有$m\perp\alpha$，C正确；D选项，当$m\parallel\alpha$时，显然也可以有$m,n$异面，$n\subset\alpha,m\perp n$．D错误．故选C．

5. D 【命题意图】本题考查古典概型，考查逻辑推理的核心素养．

【解析】根据题意，同时抛掷两个玩具，朝下的面写有的数字有16种情况，分别为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4)．朝下的面的数字之积是3的倍数的结果有7种，分别为(1,3)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,3)，则数字之积是3的倍数的概率为$P=\frac{7}{16}$．故选D．

6. B 【命题意图】本题考查线性回归方程，考查逻辑推理、数学运算、数据分析的核心素养．

【解析】根据表中数据，得$\overline{x}=\frac{1}{4}\times(9+12+15+18)=\frac{27}{2}$，$\overline{y}=\frac{1}{4}\times(60+m+30+20)=\frac{110+m}{4}$，代入回归方程得$\frac{110+m}{4}=-\frac{14}{3}\times\frac{27}{2}+103$，解得$m=50$．故选B．

7. C 【命题意图】本题考查程序框图，考查逻辑推理的核心素养．

【解析】第一次循环：$a=1,S=1<60,n=2$；第二次循环：$a=2,S=3<60,n=3$；第三次循环：$a=5,S=8<60,n=4$；第四次循环：$a=8,S=16<60,n=5$；第五次循环：$a=13,S=29<60,n=6$；第六次循环：$a=18,S=47<60,n=7$；第七次循环：$a=25,S=72>60$，输出$n=7$．故选C．

8. A 【命题意图】本题考查抛物线的定义、共线向量，考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养．

【解析】设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$，得$-\frac{1}{2}-x_1=-\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{2}\right)$，整理得$x_2=2x_1+\frac{1}{2}$．由抛

物线 C 的方程,得焦点 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,准线为 $x=-\frac{1}{2}$.根据抛物线的定义,知 $|AF|=x_1+\frac{1}{2}$,$|BF|=x_2+\frac{1}{2}$,所以 $\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{x_2+\frac{1}{2}}{x_1+\frac{1}{2}}=\frac{2x_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{x_1+\frac{1}{2}}=2$. 故选 A.

9. B 【命题意图】本题考查根据递推关系求数列的通项、累乘法的应用,考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】因为当 $n\geqslant 2$ 时,$(\sqrt{n^2-1}+1)S_n=nS_{n-1}+S_n-S_{n-1}$,即 $\sqrt{n^2-1}\,S_n=(n-1)S_{n-1}$,所以 $\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n-1}{\sqrt{(n+1)(n-1)}}=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$. 因为 $\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{S_n}{S_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}}\times\cdots\times\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)}}$. 又 $S_1=a_1=1$,所以 $S_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)}}$. 因为 $S_k=\frac{1}{35}$,所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{35}$,解得 $k=49$ 或 $k=-50$(舍去). 故选 B.

10. C 【命题意图】本题考查三角函数的图象和性质问题,考查数学建模、数学运算、数据分析的核心素养.

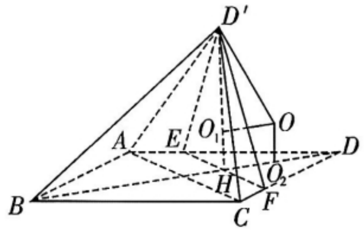
【解析】由题图知,$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{4}{3}\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{7\pi}{12}\right)=\pi$,则 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$. 所以 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$. 将 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 代入得 $A\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$,则 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,将 $\left(\frac{7\pi}{12},-2\right)$ 代入得 $A\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=-2$,则 $A=2$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,A 错误;当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时,$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\neq 0$,所以点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 不是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心,B 错误;当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}<2$,所以直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 不是 $f(x)$ 的图象的一个对称轴,D 错误;易得 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{7\pi}{24},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增,且 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$,即 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{12}$ 时取得最大值,所以 $a>\frac{\pi}{12}$,即实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{12},+\infty\right)$,C 正确. 故选 C.

11. D 【命题意图】本题考查椭圆的几何性质、直线与椭圆的位置关系、共线向量,考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】设 $F(c,0)$,$A(0,b)$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,$B(x_0,y_0)$,因为 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{FB}$,所以 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,即 $(c,-b)=2(x_0-c,y_0)$. 所以 $x_0=\frac{3c}{2}$,$y_0=-\frac{b}{2}$,即 $B\left(\frac{3c}{2},-\frac{b}{2}\right)$. 因为 B 为线段 PQ 的中点,所以 $x_1+x_2=3c$,$y_1+y_2=-b$. 又 P,Q 为椭圆上两点,所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1.\end{cases}$ 两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,所以 $k_{PQ}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{3c}{-b}=\frac{9}{10}$. 化简得 $3a^2=10bc$. 又因为 $a^2=b^2+c^2$,所以 $3(b^2+c^2)=10bc$,即 $3b^2-10bc+3c^2=0$,即 $(b-3c)(3b-c)=0$. 所以 $\frac{b}{c}=3$ 或 $\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$. 所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{b^2+c^2}}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)^2+1}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 故选 D.

12. B 【命题意图】本题考查与外接球有关的体积问题、表面积问题,考查直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】如图,设 $DE=x$,则 $AE=2-x$. 当五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积最大时,平面 $D'EF\perp$ 平面 $ABCD$. 设



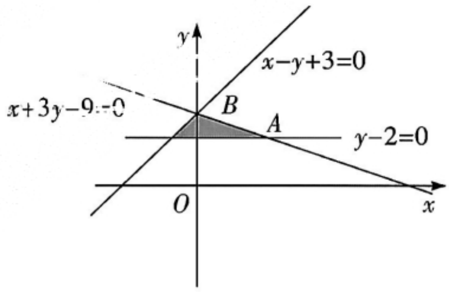
H 是 EF 的中点，则 $D'H\perp EF$. 因为平面 $D'EF\cap$ 平面 $ABCD=EF$，所以 $D'H\perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $D'H=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$S_{五边形ABCFE}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(x+2)\times\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$，所以 $V_{D'-ABCFE}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x\times\left(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right)=\frac{1}{8}(8x-x^3)$. 设 $V(x)=\frac{1}{8}(8x-x^3)(0<x<2)$，则 $V'(x)=\frac{1}{8}(8-3x^2)$. 令 $V'(x)>0$，得 $0<x<\frac{2\sqrt{6}}{3}$；令 $V'(x)<0$，得 $\frac{2\sqrt{6}}{3}<x<2$，所以 $V(x)$ 在 $\left(0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},2\right)$ 上单调递减. 所以当 $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时，五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积最大. 设 $\triangle D'EF$ 外接圆的圆心为 O_1，$\triangle DEF$ 外接圆的圆心为 O_2，如图，过点 O_1，O_2 分别作平面 $D'EF$ 和平面 DEF 的垂线交于点 O，则点 O 即为三棱锥 $D'-DEF$ 外接球的球心. 因为 $O_1D'=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$O_1O=HO_2=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，所以 $OD'^2=O_1O^2+O_1D'^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$. 所以球 O 的表面积为 $S=4\pi\times\frac{10}{9}=\frac{40}{9}\pi$. 故选 B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. ±1 【命题意图】本题考查向量的坐标运算、向量的模长公式，考查数学运算的核心素养.

【解析】由题意，得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x,5)$. 所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+5^2}=\sqrt{26}$，解得 $x=\pm1$.

14. $[4,13]$ 【命题意图】本题考查利用线性规划求目标函数的最值，考查直观想象和逻辑推理的核心素养.



【解析】不等式组表示的可行域如图中阴影部分所示，目标函数 $z=x^2+y^2$ 的几何意义表示原点与可行域中任意一点的距离的平方，结合图形可知，z 在点 $(0,2)$ 处取得最小值 4，在点 A 处取得最大值. 联立方程 $\begin{cases}x+3y-9=0,\\y-2=0,\end{cases}$ 可得点 A 的坐标为 $(3,2)$，此时 $z_{max}=13$. 所以 $z=x^2+y^2$ 的取值范围为 $[4,13]$.

15. $(-\infty,0)$ 【命题意图】本题考查构造函数以及函数的单调性，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为对于任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<2$，不妨设 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)<2x_1-2x_2$，即 $f(x_1)-2x_1<f(x_2)-2x_2$，所以 $g(x)=f(x)-2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 又 $y=f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，所以 $f(0)=0$，所以 $g(0)=f(0)-0=0$. 因为 $f(a)>2a$，即 $f(a)-2a>0$，所以 $g(a)>g(0)$. 所以 $a<0$，即不等式 $f(a)>2a$ 的解集为 $\{a|a<0\}$，故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0)$.

16. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ 【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形面积公式，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $BC=\sqrt{3}R$，所以根据正弦定理，得 $\sin\angle BAC=\frac{BC}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $\angle BAC$ 为锐角，得 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$. 由题可知 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，设 $BD=x$，则 $CD=2x$，所以在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin C}=\frac{DC}{\sin\angle CAD}$，$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{\sin C}=\frac{2x}{\frac{1}{2}}$，$\frac{\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{x}{\frac{1}{2}}$. 所以 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$. 在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 中，由

余弦定理得 $\cos C=\frac{AC^2+(2x)^2-3}{2AC\times 2x}=\frac{AC^2+(3x)^2-AB^2}{2AC\times 3x}$. 所以 $AC^2-6x^2+2AB^2-9=0$. 又 $AC=2AB$，所以 $x^2=AB^2-\frac{3}{2}$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{AC^2+AB^2-(3x)^2}{2AC\cdot AB}=\frac{1}{2}$，即 $\frac{4AB^2+AB^2-9AB^2+\frac{27}{2}}{2\times 2AB\times AB}=\frac{1}{2}$，解得 $AB=\frac{3}{2}$. 所以 $AC=3$. 因为 $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.【命题意图】本题考查等差数列的证明和求通项公式以及数列求和，考查逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1)证明：因为 $(1+3a_1)(1+3a_2)(1+3a_3)\cdots(1+3a_n)=a_n$①，

所以当 $n\geq 2$ 时，$(1+3a_1)(1+3a_2)(1+3a_3)\cdots(1+3a_{n-1})=a_{n-1}$②.

因为 $a_n\neq 0$，所以由$\frac{①}{②}$得 $1+3a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}$，…………………………………… 2 分

即 $a_{n-1}+3a_na_{n-1}=a_n$.

所以 $\frac{1}{a_n}+3=\frac{1}{a_{n-1}}$，即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=-3$. …………………………………… 4 分

由 $(1+3a_1)(1+3a_2)(1+3a_3)\cdots(1+3a_n)=a_n$，

得 $1+3a_1=a_1$，所以 $a_1=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{a_1}=-2$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 -2 为首项，-3 为公差的等差数列. …………………………………… 6 分

(2)由(1)得 $\frac{1}{a_n}=-2-3(n-1)=-3n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，

即 $a_n=-\frac{1}{3n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$. …………………………………… 8 分

所以 $a_na_{n+1}=\left(-\frac{1}{3n-1}\right)\left(-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$. …………………………………… 10 分

所以 $T_n=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_na_{n+1}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{n}{6n+4}(n\in\mathbf{N}^*)$. …………………………………… 12 分

18.【命题意图】本题考查频率分布直方图和独立性检验，考查数学运算和数据处理的核心素养.

【解析】(1)男生竞赛成绩的平均数为：

$45\times 0.05+55\times 0.15+65\times 0.2+75\times 0.3+85\times 0.2+95\times 0.1=72.5$，…………………………………… 3 分

女生竞赛成绩的平均数为：

$45\times 0.1+55\times 0.2+65\times 0.25+75\times 0.2+85\times 0.15+95\times 0.1=69$. …………………………………… 6 分

(2)完善 2×2 列联表如下：

	非“太空达人”	“太空达人”	总计
男生	40	60	100
女生	55	45	100
总计	95	105	200

…………………… 8 分

所以 K^2 的观测值 $k=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200\times(40\times45-60\times55)^2}{100\times100\times95\times105}\approx4.511>3.841$.

所以有 95%的把握认为是否获得“太空达人”称号与性别有关. …………………… 12 分

19.【命题意图】本题考查线面垂直的判定定理与性质定理、三棱锥的体积公式，考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】(1)证明：因为平面 $BB_1D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $BB_1D_1D\cap$ 平面 $ABCD=BD$，$DD_1\perp BD$，$DD_1\subset$ 平面 BB_1D_1D，

所以 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$. …………………… 1 分

又因为 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp AD$. …………………… 2 分

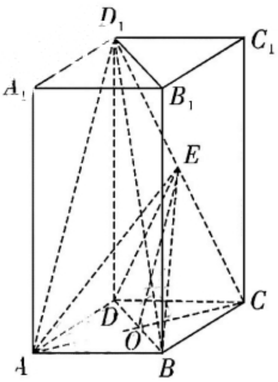
因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $BC//AD$.

因为 $BC\perp BD_1$，所以 $AD\perp BD_1$. …………………… 3 分

因为 $BD_1\subset$ 平面 BB_1D_1D，$DD_1\subset$ 平面 BB_1D_1D，且 $BD_1\cap DD_1=D_1$，

所以 $AD\perp$ 平面 BB_1D_1D. …………………… 5 分

(2)如图，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OE.



因为 $AD_1//$ 平面 BDE，平面 $ACD_1\cap$ 平面 $BDE=OE$，$AD_1\subset$ 平面 ACD_1，

所以 $AD_1//OE$. …………………… 6 分

因为 O 为 AC 的中点，所以 E 为 CD_1 的中点.

因为 $AD\perp$ 平面 BB_1D_1D，$BD\subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $AD\perp BD$. ………… 7 分

因为 $\angle BAD=60^\circ$，所以 $\angle ADC=120^\circ$，$\angle ABD=30^\circ$.

因为 $AB=1$，所以在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AD=AB\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}$. …………………… 9 分

所以 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot DC\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. …………… 10 分

所以 $V_{E-ABD_1}=\dfrac{1}{2}V_{C-ABD_1}=\dfrac{1}{2}V_{D_1-ABC}=\dfrac{1}{2}V_{D_1-ACD}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}DD_1\times S_{\triangle ACD}=$

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$. …………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查双曲线的标准方程与性质、直线与双曲线的位置关系、双曲线中的最值问题，考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】(1)由双曲线 E 的离心率为 2，得 $\dfrac{c}{a}=2$①. …………………… 1 分

因为双曲线 E 过点 $P(2,3)$，所以 $\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1$②. …………………… 2 分

又 $c^2=a^2+b^2$③，

联立①②③式，解得 $a=1$，$b=\sqrt{3}$. …………………… 3 分

故双曲线 E 的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………… 4 分

(2)由双曲线的对称性,知四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $S_{四边形ABCD}=4S_{\triangle OAD}$.

由题意知直线 AD 的斜率不为零,设 AD 的方程为 $x=my+2\left(m\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

联立 $\begin{cases}x=my+2,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x,得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$. ………………………… 5 分

$\Delta=36(m^2+1)>0$,设 $A(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

则 $y_1+y_2=\frac{-12m}{3m^2-1}$,$y_1\cdot y_2=\frac{9}{3m^2-1}$. ………………………… 6 分

因为 A,D 均在双曲线右支,所以 $\begin{cases}x_1+x_2>0,\\ x_1\cdot x_2>0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}m(y_1+y_2)+4=\frac{-4}{3m^2-1}>0,\\ m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4=\frac{-3m^2-4}{3m^2-1}>0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant m^2<\frac{1}{3}$. ………………………… 7 分

所以 $S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}\times|OF|\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$,

$=\sqrt{\left(\frac{-12m}{3m^2-1}\right)^2-4\times\frac{9}{3m^2-1}}=\frac{6\sqrt{m^2+1}}{1-3m^2}\left(0\leqslant m^2<\frac{1}{3}\right)$. ………………………… 9 分

令 $\sqrt{m^2+1}=t\left(1\leqslant t<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,则 $m^2=t^2-1$.

所以 $S_{\triangle OAD}=\frac{6t}{4-3t^2}=\frac{6}{\frac{4}{t}-3t}\left(1\leqslant t<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. ………………………… 10 分

令函数 $f(t)=\frac{4}{t}-3t$,易得 $f(t)$ 在区间 $\left[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减,

所以当 $t=1$ 时,$(S_{\triangle OAD})_{\min}=6$. ………………………… 11 分

所以四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 24. ………………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的单调性、证明不等式,考查数学抽象、逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1)由题可得 $f'(x)=\frac{m}{x}+1-\frac{m+1}{x^2}=\frac{(x-1)[x+(m+1)]}{x^2}$,$x>0$.

当 $m+1\geqslant0$,即 $m\geqslant-1$ 时,$x+(m+1)>0$,

由 $f'(x)>0$,得 $x>1$;由 $f'(x)<0$,得 $0<x<1$,

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 上单调递减.

当 $m+1<-1$,即 $m<-2$ 时,

由 $f'(x)>0$,得 $x>-m-1$ 或 $0<x<1$;由 $f'(x)<0$,得 $1<x<-m-1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$,$(-m-1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(1,-m-1)$ 上单调递减. ………………………… 3 分

当 $-1<m+1<0$,即 $-2<m<-1$ 时,

由 $f'(x)>0$,得 $0<x<-m-1$ 或 $x>1$;由 $f'(x)<0$,得 $-m-1<x<1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,-m-1)$,$(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-m-1,1)$ 上单调递减.

当 $m+1=-1$,即 $m=-2$ 时,$f'(x)\geqslant0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

综上所述,当 $m\geqslant-1$ 时,$f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$,单调递减区间为 $(0,1)$;当 $m<-2$ 时,$f(x)$ 的单

调递增区间为$(0,1)$，$(-m-1,+\infty)$，单调递减区间为$(1,-m-1)$；当$-2<m<-1$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,-m-1)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为$(-m-1,1)$；当$m=-2$时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$. ………………………………………………………… 6分

(2)当$m=1$时，由$x^2\left(\ln x+x+\frac{2}{x}\right)<e^x+x^3$，

得$\ln x+x+\frac{2}{x}<\frac{e^x}{x^2}+x$，即$\frac{e^x}{x^2}-\ln x-\frac{2}{x}>0$.

设$h(x)=\frac{e^x}{x^2}-\ln x-\frac{2}{x}$，$x>0$，

则$h'(x)=\frac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{(x-2)(e^x-x)}{x^3}$. ………………………………………… 8分

设$k(x)=e^x-x$，$x>0$，则$k'(x)=e^x-1$.

因为当$x>0$时，$k'(x)>0$，

所以函数$k(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又因为$k(0)=1>0$，所以当$x>0$时，$k(x)>0$，即$e^x-x>0$. ……………………………………… 10分

令$h'(x)=0$，得$x=2$，因为$e^x-x>0$，

所以当$x\in(0,2)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；当$x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

所以$h(x)_{\min}=h(2)=\frac{e^2}{4}-\ln 2-1$.

又因为$h(2)=\frac{e^2-4\ln 2-4}{4}>0$，所以$h(x)>0$.

因此，当$x>0$时，$h(x)>0$恒成立.

故当$m=1$时，$x^2f(x)<e^x+x^3$. ………………………………………………………………… 12分

(二)选考题：共10分. 请考生在22、23题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【命题意图】本题考查参数方程化普通方程、直角坐标方程化极坐标方程、参数的几何意义的应用，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为直线l的参数方程为$\begin{cases}x=4+t,\\ y=2+t\end{cases}$($t$为参数)，

所以消去参数t，得直线l的普通方程为$x-y-2=0$. ………………………………………… 1分

易知点N的直角坐标为$(1,0)$，由题意知$|MN|=\sqrt{2}$. ……………………………………… 2分

设$M(x,y)$，则$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}$，即$(x-1)^2+y^2=2$，即曲线$C$的直角坐标方程为$x^2+y^2-2x-1=0$.
…………………………………………………………………………………………… 3分

因为$\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，

所以曲线C的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-1=0$. ………………………………………… 4分

(2)由题意可知，点$P(1,-1)$在直线l上，

直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$为参数). ……… 5分

将直线l的参数方程代入曲线C的直角坐标方程中，得$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-1\right)^2=2$，

化简得 $t^2-\sqrt{2}t-1=0$. …………………………………………………………… 6 分

设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=\sqrt{2},t_1t_2=-1$. ……………………………… 7 分

所以 $|PA|\left(|PB|+\frac{1}{|PB|}\right)+|PB|\left(|PA|+\frac{1}{|PA|}\right)=\frac{|PA|(|PB|^2+1)}{|PB|}+\frac{|PB|(|PA|^2+1)}{|PA|}$

$=\frac{2|PA|^2|PB|^2+|PA|^2+|PB|^2}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{2t_1^2t_2^2+(t_1^2+t_2^2)}{|t_1t_2|}$

$=\frac{2(t_1t_2)^2+(t_1+t_2)^2-2t_1t_2}{|t_1t_2|}$ …………………………………………………………… 9 分

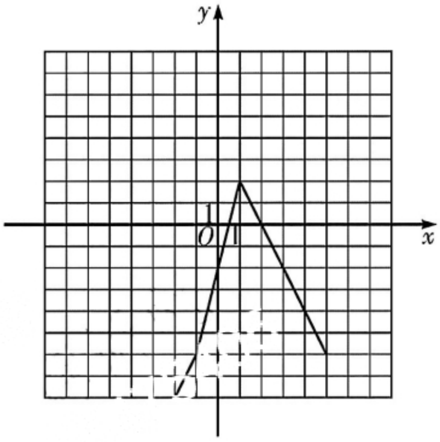
$=\frac{2\times(-1)^2+(\sqrt{2})^2-2\times(-1)}{1}=6$. ………………………………………………… 10 分

23.【命题意图】本题考查双绝对值函数的图象和含参不等式，考查直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1) 由题意知

$f(x)=|x+1|-3|x-1|=\begin{cases}2x-4,x\leqslant-1,\\4x-2,-1<x<1,\\-2x+4,x\geqslant1,\end{cases}$ ……… 2 分

则 $f(x)$ 的图象如图所示，



由 $f(x)$ 的图象可知 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,2]$. ………… 5 分

(2) 由 $4x-2=0$，得 $x=\frac{1}{2}$；

由 $-2x+4=0$，得 $x=2$. …………………………………… 7 分

若存在 x，使得不等式 $f(x)\geqslant|4x-a|$ 成立，

则由 $f(x)$ 的图象可知 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a}{4}\leqslant2$，解得 $2\leqslant a\leqslant8$.

故实数 a 的取值范围为 $[2,8]$. ………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线