

2022-2023 学年度第二学期期末调研测试

高二数学

2023.6

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求）

1. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 15 < 0\}$, $B = \{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()

A.1 B.2 C.3 D.4

2. 若命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \leq m$ ”是假命题，则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 1]$ B. $(-\infty, 1)$ C. $[1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

3. 已知直线 l 的方向向量为 $\vec{e} = (2, -1, 2)$, 平面 α 的法向量为 $\vec{n} = (-2, a - b, a + b)$ ($a, b \in \mathbf{R}$). 若 $l \perp \alpha$, 则 $a + 3b$ 的值为 ()

A.-5 B.-2 C.1 D.4

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \geq 0, \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(2a) < f(6-a)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$

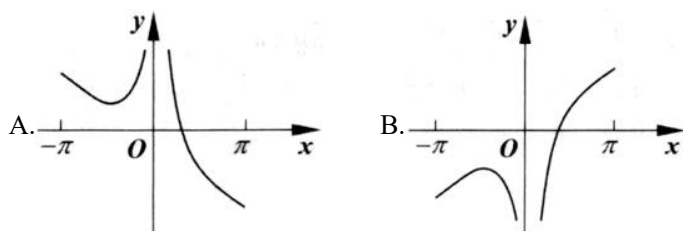
5. 某小吃店的日盈利 y (单位: 百元) 与当天平均气温 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 之间有如下数据:

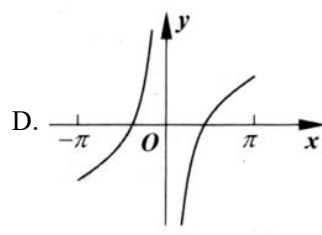
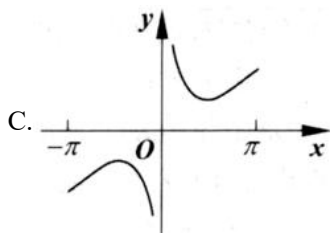
$x/^{\circ}\text{C}$	-2	-1	0	1	2
y /百元	5	4	a	2	1

经分析知, y 与 x 之间有较强的线性关系, 其线性回归直线方程为 $\hat{y} = -x + 2.8$, 则 $a =$ ()

A.3 B.2.8 C.2 D.1

6. 函数 $f(x) = x^3 - \frac{\sin x}{x^5}$ 在 $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ 上的图像大致为 ()





7. 已知 $(2x-1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$, 则 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10} =$ ()

A.0 B.1 C.10 D.20

8. 已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(4+x) = f(4-x)$, $f(0) = -1$, 且当 $x \in (0, 4]$ 时, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. 若关于 x 的不等式 $f(x) > a$ 在 $[-48, 48]$ 上有且只有 60 个整数解, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-1, 0]$ B. $\left[0, \frac{\ln 2}{2}\right)$ C. $\left(-1, \frac{\ln 2}{2}\right)$ D. $\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right)$

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分)

9. 已知 $X \sim N(90, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 则 ()

A. $P(X < 90) = 0.5$

B. $P(70 < X < 80) = P(110 < X < 120)$

C. $P(X < 60) = P(X > 120)$

D. 若 σ 越大, 则 $P(75 < X < 105)$ 越大

10. 某班准备举行一场小型班会, 班会有 3 个歌唱节目和 2 个语言类节目, 现要排出一个节目单, 则下列说法正确的是 ()

A. 若 3 个歌唱节目排在一起, 则有 6 种不同的排法

B. 若歌唱节目与语言类节目相间排列, 则有 12 种不同的排法

C. 若 2 个语言类节目不排在一起, 则有 72 种不同的排法

D. 若前 2 个节目中必须要有语言类节目, 则有 84 种不同的排法

11. 下列命题中正确的是 ()

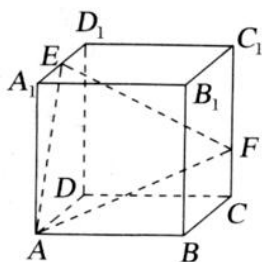
A. $\forall x \in \left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{3}} x$

B. 函数 $y = \frac{1-2x}{x-1}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内是减函数

C.若函数 $f(x) = |2^x - 2| - b$ 有两个零点, 则实数 b 的取值范围是 $0 < b < 2$

D.函数 $f(x) = x^a$ 的图像经过点 $(4, 2)$, 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

12.如图, 设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E 为线段 A_1D_1 的中点, F 为线段 CC_1 上的一个动点, 则下列说法正确的是 ()



A.当 F 为 CC_1 的中点时, 点 B_1 到平面 AEF 的距离为 $\frac{10}{29}\sqrt{29}$

B.当 F 为 CC_1 的中点时, 记 DB_1 与平面 AEF 的交点为 M , 则 $DM = \frac{4}{9}DB_1$

C.存在 F , 使得异面直线 DB_1 与 BF 所成的角为 45°

D.存在 F , 使得点 F 到直线 AE 的距离为 $\frac{12}{5}$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13.若直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 是曲线 $y = \ln x$ 的一条切线, 则实数 b 的值为_____.

14.已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 以顶点 A 为端点的三条棱长均为 2, 且它们彼此的夹角都是 60° , 则 $|\overrightarrow{BD_1}| =$ _____.

15.现调查某地区某种野生动物的数量, 将该地区分成面积相近的 200 个地块, 从这些地块中简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样本, 调查得到样本数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$, 其中 x_i, y_i 分别表示第 i 个样本的植物覆盖面积 (单位: 公顷) 和这种野生动物的数量, 构造向量

$$\vec{a} = (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_{20} - \bar{x}), \vec{b} = (y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots, y_{20} - \bar{y}), \text{ 其中 } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20}}{20},$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{20}}{20}, \text{ 并计算得 } \sum_{i=1}^{20} x_i = 60, \sum_{i=1}^{20} y_i = 1200, \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 4400, |\vec{a}| = 9, |\vec{b}| = 1 \text{ 由选择性必修二教材}$$

中的知识, 我们知道 n 对数据的相关系数 $r = \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, 则上述数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$ 的相关系数 $r =$ _____.

16.五一小长假, 多地迎来旅游高峰期, 各大旅游景点都推出了种种新奇活动以吸引游客, 小明去某景点游玩时, 发现了一个趣味游戏, 游戏规则为: 一个会走路的机器人从一数轴上的点出发沿该数轴行走, 游客可以设定机器人总共行走的步数 n , 机器人每一步会随机选择前或向后行走, 且每一步的距离均为一个单位, 设机器人走完设定的 n 步后所在位置对应数为随机变量 X_n , 则 $P(X_6 = 0) =$ _____, $D(X_n) =$ _____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知集合 $M = \left\{ x \mid \frac{1}{4} \leq 2^x \leq 16 \right\}$, $N = \{ x \mid |x - 2| \leq m \}$, 其中 $m > 0$.

(1) 若 $m = 3$, 求 $M \cap N$;

(2) 若“ $x \in M$ ”是“ $x \in N$ ”的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^n$ ($n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*$) 的展开式中, _____ 给出下列条件:

①若前三项的二项式系数之和为 46;

②若所有奇数项的二项式系数之和为 256;

③若第 7 项为常数项.

试在这三个条件中选择一个, 补充在上面的横线上, 并且完成下列问题:

(1) 求 n 的值;

(2) 求展开式中所有的有理项.

19. (本小题满分 12 分)

在 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这 7 个自然数中.

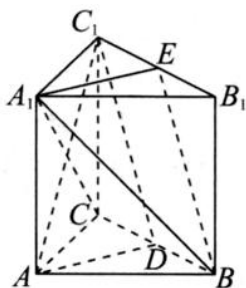
(1) 每次取一个数, 取后放回, 共取 3 次, 设 X 为取到奇数的次数, 求 X 的数学期望;

(2) 任取 3 个不同的数, 设 Y 为其中奇数的个数, 求 Y 的概率分布.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形, $AA_1 = AB = 3$, D, E 分别

为 BC, B_1C_1 上的点, 且 $\frac{BD}{BC} = \frac{C_1E}{C_1B_1} = t (0 < t < 1)$.



(1) 若 $t = \frac{1}{2}$, 求证: $AD \parallel \text{平面 } A_1BE$;

(2) 若 $t > \frac{1}{2}$, 直线 A_1C 与平面 A_1BE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求二面角 C_1-AD-C 的余弦值

21. (本小题满分 12 分)

某电影平台为了解观众对某影片的感受，已知所有参评的观众中男、女之比为 2:1，现从中随机抽取 120 名男性和 60 名女性进行调查，抽取的男观众中有 80 人给了“点赞”的评价，女观众中有 45 人给了“一般”的评价.

(1) 把下面 2×2 列联表补充完整, 并判断是否有 99.9% 的把握认为对该影片的评价与性别有关?

性别	评价结果		合计
	点赞	一般	
男	80		
女		45	
合计			180

(2) 用频率估计概率, 在所有参评的观众中按“男”和“女”进行分层抽样, 随机抽取 6 名参评观众.

①若再从这 6 名参评观众中随机抽取 1 人进行访谈, 求这名观众给出“点赞”评价的概率;

②若再从这 6 名参评观众中随机抽取 2 人进行访谈, 求在抽取的 2 人均给出“点赞”的条件下, 这 2 人是 1 名男性和 1 名女性的概率.

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P(\chi^2 \leq x_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22. (本小题满分 12 分)

已知 a 为实数，函数 $f(x) = e^{x-1} + a \ln x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在极值点, 求 a 的取值范围, 并说明是极大值点还是极小值点;

(2) 若 $f(x) > (a+1)x - a$ 对 $x > 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

2022-2023 学年度第二学期期末调研测试

高二数学参考答案

2023.6

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	C	B	D	B	AC	BCD	ACD	ABD

题号	13	14	15	16
答案	$\ln 2 - 1$ 或写成 $\ln \frac{2}{e}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{16}; n$

17. 【答案】(1) 将 $m = 3$ 代入 $N = \{x | |x - 2| \leq m (m > 0)\}$,

所以 $N = \{x | -1 \leq x \leq 5\}$, 而 $M = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 所以 $M \cap N = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$.

(2) 因为 $m > 0$, 所以 $N = \{x | 2 - m \leq x \leq 2 + m\}$.

因为“ $x \in M$ ”是“ $x \in N$ ”成立的充分不必要条件,

所以 $M \subset N$, 则 $\begin{cases} 2 - m \leq -2 \\ 2 + m \geq 4 \end{cases}$, 且不同时取等号, 所以 $m \geq 4$.

18. 【答案】(1) 选①: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46$, 即 $n^2 + n - 90 = 0$, 解得 $n = 9$, 或 $n = -10$ (舍去) ..

选②: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1} = 256$, 解得 $n = 9$.

选③: $T_{r+1} = C_n^r (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} x^{\frac{2n-3r}{4}}$, 令 $\frac{2n-3r}{4} = 0$, 则 $n = \frac{3}{2}r$.

因为展开式中第 7 项为常数项, 即 $r = 6$, 所以 $n = 9$.

(2) 因为 $T_{r+1} = C_9^r (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{9-r} x^{\frac{18-3r}{4}}$, $r = 0, 1, 2, \dots, 9$.

所以当 $r = 2$ 或 6 时, $\frac{18-3r}{4}$ 为整数, 所以有理项为 $T_3 = \frac{9}{32}x^3$ 和 $T_7 = \frac{21}{2}$.

19. 【答案】(1) (解法一) 因为每次取到的数是奇数的概率为 $p = \frac{4}{7}$, 取到的数不是奇数的概率为 $\frac{3}{7}$,