2023年湛江市普通高考第二次模拟测试
数学参考答案

1. A　依题意得 $z=2+5i$，则 $1+\bar{z}=1+(2-5i)=3-5i$，所以 $1+\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $(3,-5)$.

2. D　由 $\complement_{R}A=\{x\mid x^2-3x\leqslant 4\}=[-1,4]$，$B=(1,+\infty)$，得 $(\complement_{R}A)\cap B=(1,4]$.

3. A　这九个管辖区的数据按照从小到大的顺序排列为 303824，333239，487093，487712，698474，886452，927275，1427664，1443099，因为 $9\times 70\%=6.3$，所以这九个管辖区的数据的第70%分位数是927275.

4. C　$(2x^2-\frac{1}{x})^5$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k(2x^2)^{5-k}(-\frac{1}{x})^k=C_5^k2^{5-k}(-1)^kx^{10-3k}$，令 $10-3k=4$，得 $k=2$，所以 x^4 的系数是 $C_5^2\times 2^3\times(-1)^2=80$.

5. A　显然新几何体的表面积比原几何体的表面积多了原几何体的轴截面面积，设圆柱的底面半径为 r，高为 h，则 $2rh=10$，所以圆柱的侧面积为 $2\pi rh=10\pi$.

6. B　因为直线 $l:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角为 $30°$，

所以圆 C 的圆心在两切线所成角的角平分线 $y=\sqrt{3}x$ 上.

设圆心 $C(a,\sqrt{3}a)$，则圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-\sqrt{3}a)^2=a^2$.

将点 $P(2,\sqrt{3})$ 的坐标代入，得 $(2-a)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}a)^2=a^2$，解得 $a=1$ 或 $a=\frac{7}{3}$.

故圆 C 的直径为2或 $\frac{14}{3}$.

7. A　当 $x,y\in(0,+\infty)$ 时，$\frac{4x^4+17x^2y+4y^2}{x^4+2x^2y+y^2}=\frac{(4x^2+y)(x^2+4y)}{(x^2+y)^2}\leqslant\frac{(\frac{4x^2+y+x^2+4y}{2})^2}{(x^2+y)^2}=\frac{25}{4}$，

当且仅当 $4x^2+y=x^2+4y$，即 $y=x^2$ 时，等号成立. 所以 $\frac{4x^4+17x^2y+4y^2}{x^4+2x^2y+y^2}$ 的最大值为 $\frac{25}{4}$.

所以 $\frac{m}{4}>\frac{25}{4}$，即 $m>25$.

8. B　设 $h(t_1)=g(t_2)=m$，则 $t_1=1+\ln m$，$t_2=\frac{1}{2}(e^{m-2}+1)$，由 $t>\frac{1}{2}$，得 $m>e^{-\frac{1}{2}}$，则 $t_2-t_1=\frac{1}{2}(e^{m-2}+1)-(1+\ln m)=\frac{1}{2}e^{m-2}-\ln m-\frac{1}{2}$，$m>e^{-\frac{1}{2}}$，设函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}-\ln x-\frac{1}{2}$，$x>e^{-\frac{1}{2}}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}-\frac{1}{x}$，$f'(x)$ 在 $(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ 上为增函数，且 $f'(2)=0$，所以当 $e^{-\frac{1}{2}}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)_{\min}=f(2)=-\ln 2$.

9. BD　因为 $5\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha-1=0$，所以 $10\sin\alpha\cos\alpha+5(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$，

整理得 $2\sin^2\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$，则 $2\tan^2\alpha-5\tan\alpha-3=0$，解得 $\tan\alpha=3$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

10. ACD　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.若$d=1$,则这10层的塔数之和为$10\times1+\frac{10\times9}{2}=55$,则最多有$55+10+10=75$座塔,不符合题意;若$d\geqslant3$,则这10层的塔数之和不少于$10\times1+\frac{10\times9}{2}\times3>108$,不符合题意.所以$d=2$,这10层的塔数之和为$10\times1+\frac{10\times9}{2}\times2=100$,塔数依次是1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,依题意剩下2层的塔数为3与5.所以这12层塔的塔数分别为1,3,3,5,5,7,9,11,13,15,17,19,因此A,C,D正确,B错误.

11. BCD　因为$M\sim N(165,\sigma^2)$,所以$P(M<167)=0.5+0.3=0.8$,所以A错误.因为$P(165<M<168)=P(162<M<165)=0.5-0.15=0.35$,所以$P(167<M<168)=0.35-0.3=0.05$,所以B正确.$P(M>163)=P(M<167)=0.8$,若从种植园成熟的红橙中随机选取600个,则质量大于163 g的个数$X\sim B(600,0.8)$,所以$E(X)=600\times0.8=480$,所以C正确.$P(163<M<168)=0.35+0.3=0.65$,若从种植园成熟的红橙中随机选取600个,则质量在163 g~168 g的个数$Y\sim B(600,0.65)$,所以$D(Y)=600\times0.65\times(1-0.65)=136.5$,所以D正确.

12. AC　当$a=b$时,直线AF与另一条渐近线平行,所以$a\neq b$.

当$a>b$时,如图1,过F作另一条渐近线的垂线,垂足为P,则$|AF|=|PF|$,由$|FB|=4|AF|$,得$\sin\angle PBF=\frac{|PF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOP=\frac{1}{4}$,所以$2\cos^2\angle AOF-1=\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$,$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$,所以$\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{5}}$,则$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{3}{5}}$,$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{3}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

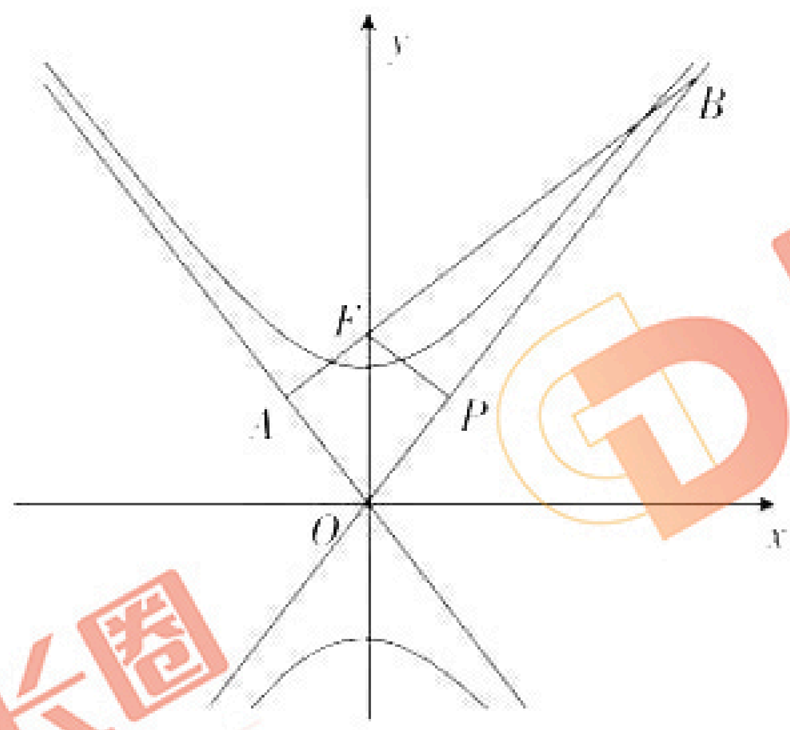


图1

当$a<b$时,如图2,过F作另一条渐近线的垂线,垂足为Q,则$|AF|=|QF|$,由$|FB|=4|AF|$,得$\sin\angle QBF=\frac{|QF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOB=\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOQ=-\frac{1}{4}$,所以$2\cos^2\angle AOF-1=-\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$,$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$,所以$\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{3}}$,则$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{5}{3}}$,$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{5}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

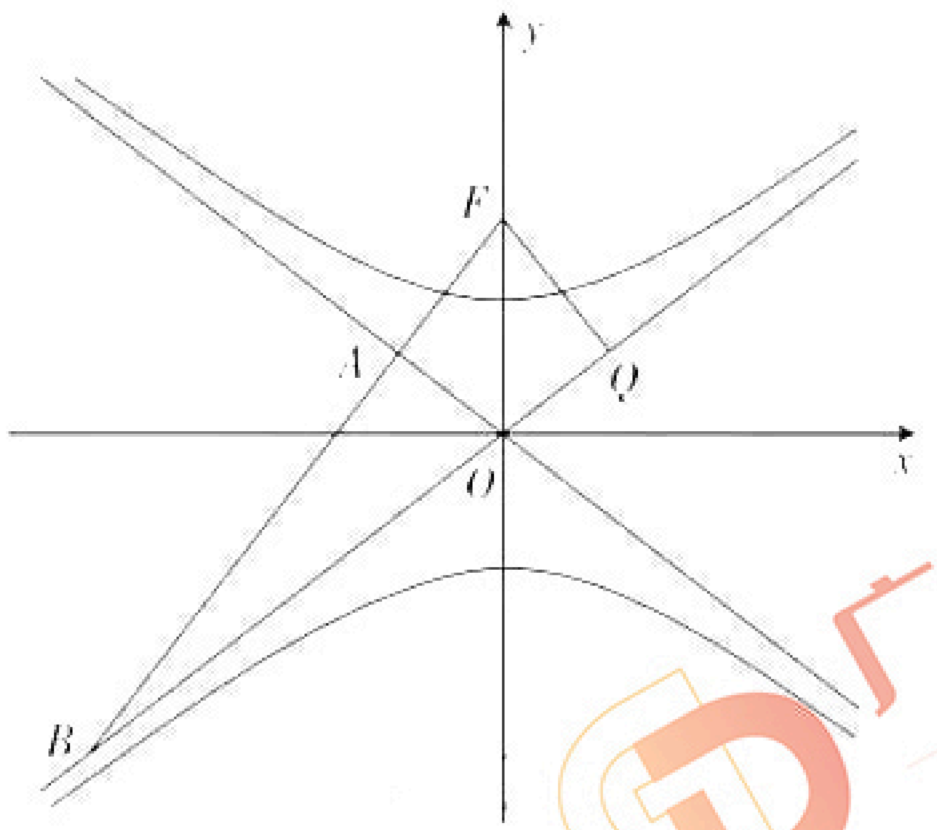


图 2

综上，C 的离心率为$\frac{2\sqrt{10}}{5}$或$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

13. $-x^2+3^x-1$　当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(x)=g(x)+1=-f(-x)=-[(-x)^2-3^{-(-x)}]=-x^2+3^x$，则 $g(x)=-x^2+3^x-1$.

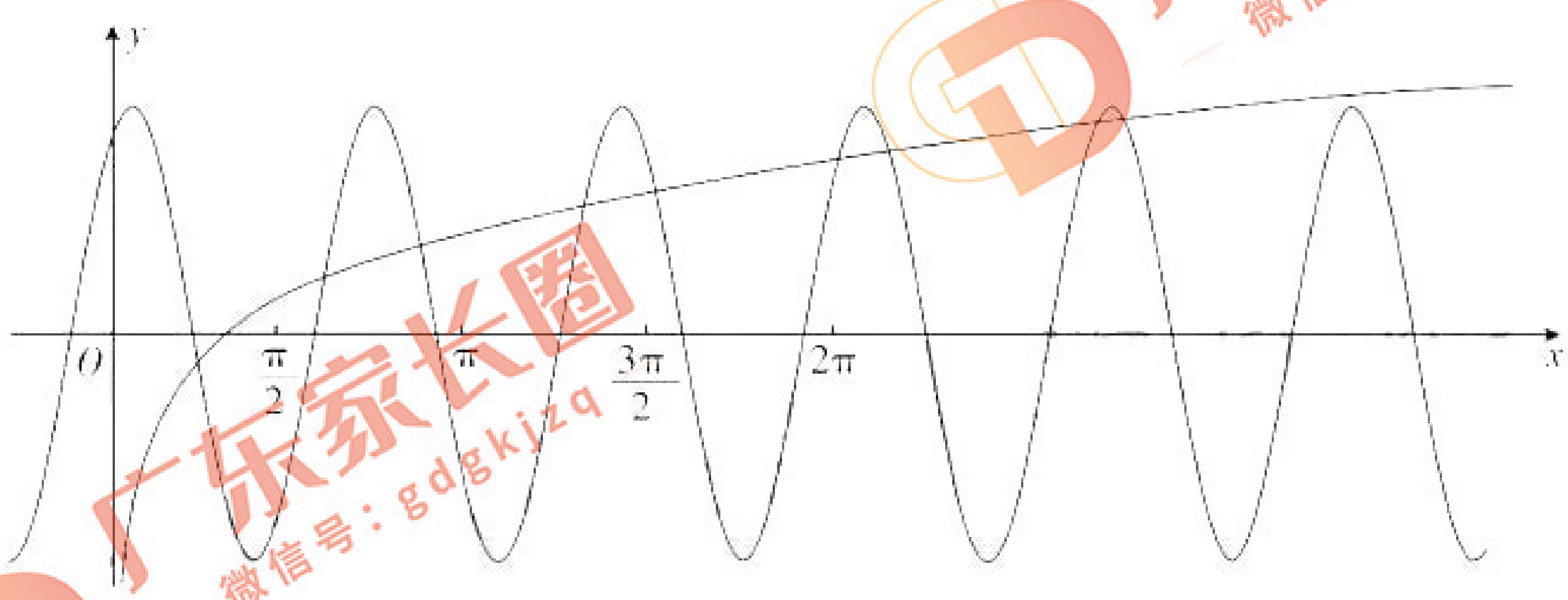
14. $x^2=2\sqrt{3}y$　依题意可设 C 的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$，因为 C 的焦点到准线的距离为 $\sqrt{3}$，所以 $p=\sqrt{3}$，所以 C 的标准方程为 $x^2=2\sqrt{3}y$.

15. 增；9　因为 $f(x)$ 在$(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{18})$上具有单调性，所以$\frac{\pi}{18}-(-\frac{\pi}{6})\leqslant\frac{T}{2}$，即$\frac{2\pi}{9}\leqslant\frac{\pi}{\omega}$，$0<\omega\leqslant\frac{9}{2}$.

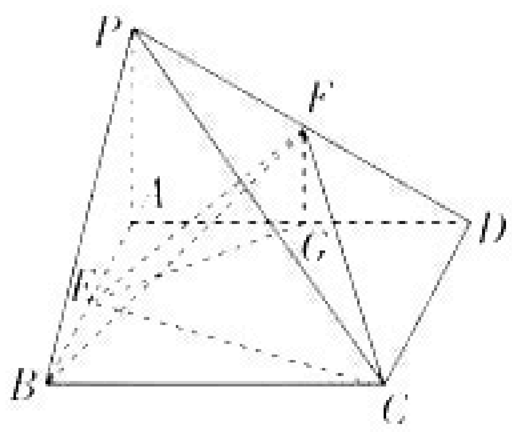
又因为 $f(\frac{2\pi}{9})=\sin(\frac{2\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{3})=0$，所以$\frac{2\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=\frac{9}{2}k-\frac{3}{2}$，只有 $k=1$，$\omega=3$ 符合要求，此时 $f(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{3})$.

当 $x\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{18})$时，$3x+\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，所以 $f(x)$ 在$(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{18})$上单调递增.

作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=\lg x$ 的图象，由图可知，这两个函数的图象共有 9 个交点，所以函数 $y=f(x)-\lg x$ 的零点个数为 9.



16. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　如图，在 AD 上取点 G，使得 $FG/\!/AP$.



由$\frac{AE}{AB}=\frac{DF}{DP}$，设 $AE=xAB$，$DF=xPD$，其中 $0<x<1$.

由 $AB=AP=1$，$BC=2$，$AP\perp$平面 $ABCD$，可得 $PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=$

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AE=x$，$DF=\sqrt{5}x$，$BE=1-x$.

$\because FG /\!/ AP$，$AP\perp$平面 $ABCD$，$\therefore FG\perp$平面 $ABCD$.

在$\triangle APD$中，有$\frac{GF}{AP}=\frac{DF}{PD}$，可得$\frac{GF}{1}=\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5}}$，可得 $GF=x$.

$\triangle BCE$ 的面积为$\frac{1}{2}BE\cdot BC=\frac{1}{2}(1-x)\times 2=1-x$.

$V_{C-BEF}=V_{F-BCE}=V(x)=\frac{1}{3}(1-x)x=\frac{1}{3}[-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]$，

可得当 $x=\frac{1}{2}$时，三棱锥 $C-BEF$ 的体积取得最大值 $V(\frac{1}{2})=\frac{1}{12}$.

当三棱锥 $C-BEF$ 的体积取得最大值时，E 为 AB 的中点，F 为 DP 的中点.

连接 EG，则$\angle FEG$ 为 EF 与平面 $ABCD$ 所成的角，$\because FG=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}$，$EG=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore \tan\angle FEG=\frac{FG}{EG}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

17. 解：(1) A 旅行社 240 人次的消费总额为 $20\times 200+40\times 600+60\times 1000+120\times 1200=232000$ 元，…………………… 2 分

B 旅行社 240 人次的消费总额为 $10\times 200+50\times 600+70\times 1000+110\times 1200=234000$ 元，…………………… 4 分

因为 $234000>232000$，所以 B 旅行社 240 人次的消费总额更大. …………………… 5 分

(2) 对于 A 旅行社，这 240 人次去漓江的频率为$\frac{120}{240}=\frac{1}{2}$，

所以甲去漓江的概率为$\frac{1}{2}$. …………………… 6 分

对于 B 旅行社，这 240 人次去漓江的频率为$\frac{110}{240}=\frac{11}{24}$，

所以乙去漓江的概率为$\frac{11}{24}$. …………………… 7 分

故甲、乙至少有一人去漓江的概率为 $1-(1-\frac{11}{24})\times(1-\frac{1}{2})=\frac{35}{48}$. …………………… 10 分

18. 解：(1) 因为 $b^2+c^2=a^2-bc$，

所以 $b^2+c^2-a^2=-bc$. …………………… 1 分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$. …………………… 3 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. …………………… 4 分

(2) 由 $b\sin A=4\sin B$ 及正弦定理，得 $ab=4b$，…………………… 5 分

所以 $a=4$. …………………… 6 分

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geq 2bc+bc$，…………………… 7 分

所以 $bc\leqslant\frac{16}{3}$，…………………………………………………………………… 8 分

当且仅当 $b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立. …………………………………………………… 9 分

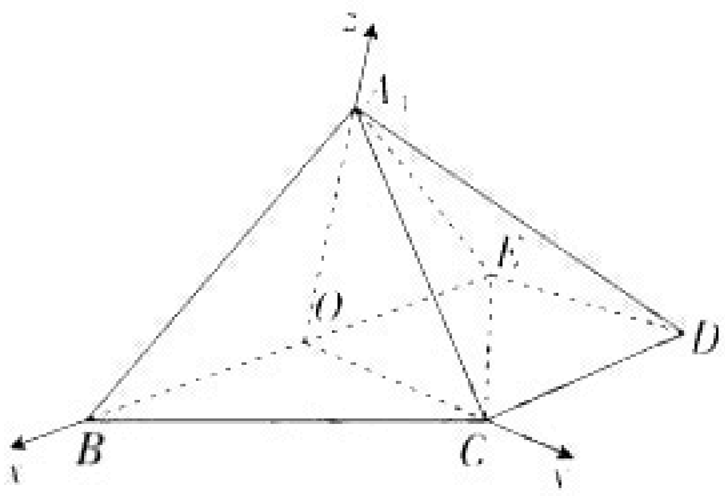
因为 $\lg b+\lg c\geqslant 1-2\cos(B+C)$，所以 $\lg(bc)\geqslant 1+2\cos A=0$，则 $bc\geqslant 1$. ………… 10 分

所以 $1\leqslant bc\leqslant\frac{16}{3}$，因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A$，所以 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $[\frac{\sqrt{3}}{4}$，$\frac{4\sqrt{3}}{3}]$. …………………………………………………………………………………… 12 分

19.(1)证明：由题意可知 $\angle BEC=\angle CED=\frac{\pi}{4}$，$\angle BED=\frac{\pi}{2}$，$DE\perp BE$，……………………… 2 分

因为 $A_1B\perp DE$，$A_1B\cap BE=B$，…………………………………………………………… 3 分

所以 $DE\perp$ 平面 A_1BE. ………………………………………………………………………… 4 分



(2)解：取 BE 的中点 O，连接 A_1O，CO，

易知 $A_1O\perp BE$，$CO\perp BE$，

由 $BE=\sqrt{2}CE$，$CE=\sqrt{2}CD$，可知 $BE=2CD$，$OE=CD$，……………………………………… 5 分

由 $DE\perp BE$ 且 $CD\perp DE$，可知 $OE/\!/CD$，四边形 $OCDE$ 为平行四边形，$CO/\!/DE$，$CO\perp$ 平面 A_1BE，…………………………………………………………… 6 分

设 $BE=2$，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,1)$，$E(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-1,1,0)$，$\overrightarrow{EA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{EC}=(1,1,0)$. ……………………………………………………………………………………… 7 分

设平面 A_1EC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{EA_1}\cdot\boldsymbol{n}=x+z=0,\\ \overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=x+y=0,\end{cases}$ ………………………… 8 分

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$，…………………………………………………………… 9 分

平面 A_1ED 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$. ……………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，…………………………………………… 11 分

由图可知二面角 $C-A_1E-D$ 为锐角，故二面角 $C-A_1E-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……… 12 分

20.解：(1)由 $\frac{1}{a_n}=\frac{b_n}{n^2+1}$，得 $a_nb_n=n^2+1$，…………………………………………… 1 分

由 $\frac{1}{a_n-b_n}=b_n$，得 $a_nb_n=1+b_n^2$，……………………………………………………… 2 分

两式相减得 $b_n^2=n^2$，因为 $\{b_n\}$ 是正项数列，所以 $b_n=n$，……………………………………… 4 分

所以 $a_n=\frac{n^2+1}{b_n}=n+\frac{1}{n}$. …………………………………………………………………… 5 分

(2)$[a_n+a_{n+1}]=[n+\frac{1}{n}+n+1+\frac{1}{n+1}]=[2n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}]=\begin{cases}4,n=1,\\2n+1,n\geqslant 2,\end{cases}$ ……… 6 分

则当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=4\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(2n+1)\times 2^n$，……… 7 分

所以 $2S_n=16+5\times 2^3+7\times 2^4+\cdots+(2n+1)\times 2^{n+1}$，……… 8 分

两式相减得 $-S_n=12+2\times(2^3+2^4+\cdots+2^n)-(2n+1)\times 2^{n+1}$ ……… 9 分

$=12+2\times\frac{2^3-2^n\times 2}{1-2}-(2n+1)\times 2^{n+1}=(1-2n)\times 2^{n+1}-4$，……… 10 分

即 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$. ……… 11 分

因为 $S_1=8$ 满足 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$，所以 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$. ……… 12 分

21. 解：(1)依题意可得 $a=2$. ……… 1 分

当直线 l 经过点 $D(-2,\sqrt{2})$ 时，l 的方程为 $x=-4\sqrt{2}y+6$，……… 2 分

代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得 $(8b^2+1)y^2-12\sqrt{2}b^2y+8b^2=0$. ……… 3 分

$\Delta=(-12\sqrt{2}b^2)^2-4(8b^2+1)\times 8b^2=32b^2(b^2-1)=0$. ……… 4 分

解得 $b^2=1$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……… 5 分

(2)(i)依题意可得直线 l 的斜率不为 0，可设 $l:x=my+6$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=my+6,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+12my+32=0$，

则 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{12m}{m^2+4},\\y_1y_2=\frac{32}{m^2+4},\end{cases}$ ……… 6 分

则 $k_{BP}k_{BQ}=\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2}{(my_1+4)(my_2+4)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16}$

$=\frac{\frac{32}{m^2+4}}{\frac{32m^2}{m^2+4}-\frac{48m^2}{m^2+4}+16}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$. ……… 8 分

(ii)因为 $k_{AP}k_{BP}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{1-\frac{x_1^2}{4}}{x_1^2-4}=-\frac{1}{4}$，……… 9 分

所以 $k_{AP}=-\frac{1}{2}k_{BQ}$，又因为 $k_{AP}+k_{BQ}=-\frac{1}{2}$，所以 $k_{BQ}=-1$. ……… 10 分

则直线 BQ 的方程为 $y=-x+2$. 与 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立得 $Q(\frac{6}{5},\frac{4}{5})$. ……… 11 分

所以 l 的方程为 $y=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}-6}(x-6)$，即 $y=-\frac{1}{6}x+1$. ……… 12 分

22. (1)解：因为 $f'(x)=e^{x-1}-x+1-\frac{m}{x}$，所以 $f'(1)=1-m$. ······ 1分

又 $f(1)=\frac{3}{2}$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-\frac{3}{2}=(1-m)(x-1)$，

即 $y=(1-m)x+m+\frac{1}{2}$. ······ 3分

(2)证明：(i)依题意可知 $f'(x)$ 有零点，即 $m=x(e^{x-1}-x+1)$ 有正数解. ······ 4分

令 $\varphi(x)=e^{x-1}-x+1$，则 $\varphi'(x)=e^{x-1}-1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增. ······ 5分

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=1>0$，所以 $m>0$. ······ 6分

(ii)不妨设 $x_1>x_2>0$，由 $f(x_1)=f(x_2)$ 可得 $m=\dfrac{e^{x_1-1}-\frac{1}{2}x_1^2+x_1-e^{x_2-1}+\frac{1}{2}x_2^2-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，······ 7分

因为 $x_1>x_2$，所以 $\ln x_1>\ln x_2$，

要证 $2m>e(\ln x_1+\ln x_2)$，

只要证 $e^{x_1-1}-\frac{1}{2}x_1^2+x_1-\frac{e}{2}(\ln x_1)^2>e^{x_2-1}-\frac{1}{2}x_2^2+x_2-\frac{e}{2}(\ln x_2)^2$. ······ 8分

令 $g(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{e}{2}(\ln x)^2$，即只要证 $g(x_1)>g(x_2)$，

即只要证 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，······ 9分

即只要证 $g'(x)=e^{x-1}-x+1-e\frac{\ln x}{x}\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即只要证 $e^{x-1}-x-1\geqslant\frac{e\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ······ 10分

令 $h(x)=\frac{e\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{e(1-\ln x)}{x^2}$.

当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)\leqslant h(e)=1$. ······ 11分

由(i)知，$\varphi(x)=e^{x-1}-x+1\geqslant1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $e^{x-1}-x+1\geqslant1\geqslant\frac{e\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

故 $2m>e(\ln x_1+\ln x_2)$. ······ 12分