哈尔滨市第九中学 2023 届高三第二次模拟考试
数学试卷答案

一．单选题 DBBCBADA

二．多选题 9. AC　10. ABC　11. BD　12. BD

三．填空题

13. 8

14. $\frac{1}{2}\vec{b}$

15. 157

16. $\sqrt{3}$

四．解答题

17.（1）$2b^2=(b^2+c^2-a^2)(1-\tan A)\therefore 2b^2=2bc\cos A(1-\tan A)\therefore b=c(\cos A-\sin A)\cdots 2$分

$\sin B=\sin C(\cos A-\sin A)\because A+B+C=\pi\cdots 3$分

由正弦定理得$\therefore \sin(A+C)=\sin C\cos A-\sin C\sin A,\therefore \sin A\cos C=-\sin C\sin A\neq 0$

$\therefore \tan C=-1\cdots 4$分，解得$C=\frac{3\pi}{4}\cdots 5$分

（2）$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{5}}{5},\therefore \sin A=\sin(B+C)=\frac{\sqrt{10}}{10}\cdots 7$分

由正弦定理得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=2\sqrt{2}\cdots 8$分，

在ΔABD中，由余弦定理得$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$，解得$AD=\sqrt{26}\cdots 10$分

18.（1）$\because a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n},\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)\cdots 2$分

又$\because \frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2}\neq 0,\therefore \frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{1}{2}$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是首项，公比均为$\frac{1}{2}$的等比数列$\cdots 5$分

（2）由（1）知，$b_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n},n为偶数;\\ \frac{n+2}{n}+\frac{n}{n+2}-2,n为奇数.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2^n},n为偶数;\\ \frac{2}{n}-\frac{2}{n+2},n为奇数.\end{cases}\cdots 8$分

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_{2k}=\left(b_1+b_3+\cdots+b_{2k-1}\right)+\left(b_2+b_4+\cdots+b_{2k}\right)$

$=\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}\right)+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2k}}$

$=2-\frac{2}{2k+1}+\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{7}{3}-\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{3\cdot 4^k}\cdots 10$分

$\because \frac{7}{3}-\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{3\cdot 4^k}$ **单调递增**，$n\to+\infty$ **时**，$\frac{7}{3}-\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{3\cdot 4^k}<\frac{7}{3}$，

$\therefore m\geq\frac{7}{3},\therefore m_{\min}=\frac{7}{3}\cdots 12$分

19.（1）$\bar{x}=\frac{60}{20}=3$，$\bar{y}=\frac{1200}{20}=60\cdots 2$分；$\hat{b}=\frac{640}{80}=8\cdots 4$分$,\hat{a}=60-24=36\cdots 5$分

故回归方程为 $\hat{y}=8x+36\cdots 6$ 分.

（2）设 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1,k_2，

x 关于 y 的线性回归方程为 $\hat{x}=\hat{a}_1+\hat{b}_1\hat{y},\hat{b}_1=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}\cdots 7$分

$k_1=b=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2}$，$k_2=\frac{1}{\hat{b}_1}=\frac{\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}\cdots 8$分

（ⅰ）注意到两条直线都过$(\bar{x},\bar{y})$，且 $k_1\neq k_2$（注：此条件在（2）中哪个位置体现均给分），

故公共点只有一个$(\bar{x},\bar{y})\cdots 9$分；

（ⅱ）$\because \frac{k_1}{k_2}=\frac{(\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}))^2}{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}=r^2,|r|\leq 1,k_1,k_2>0,\therefore k_1\leq k_2\cdots 11$分

若 $k_1=k_2$,则$|r|=1$,即$y_i=8x_i+36(i=1,2,\cdots,20)$恒成立，代入表格一组数据得：

$58.1\neq 8\times 2.7+36$，矛盾，故 $k_1<k_2\cdots 12$分

20.（1）因为 $f'(x)=e^{\sin x}\cos x-1(x\in R)\cdots 1$ 分　$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e-\frac{\pi}{2}-1,f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\cdots 3$分

所求切线方程为：$y-\left(e-\dfrac{\pi}{2}-1\right)=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，即$x+y-e+1=0\cdots5$分

（2）因为$x\in\left(-1,0\right]$，所以分$\sin x\le 0,e^{\sin x}\le 1,0<\cos x\le 1$，

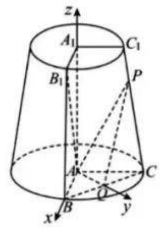
所以$e^{\sin x}\cdot\cos x\le 1$，所以$f'(x)\le 0\cdots10$分，

所以$f(x)$在$\left(-1,0\right]$上是减函数，且$f(0)=0\cdots11$分

所以$f(x)$在$\left(-1,0\right]$上有且仅有一个零点$\cdots12$分

21.（1）解法一：因为$AA_1\perp AB$，所以$AA_1\perp AC$，所以$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=\theta=120^\circ$，

又$AB\cap AC=A,AB,AC\subset$面ABC，所以$AA_1\perp$面ABC，



又$AQ\subset$面ABC，所以$AA_1\perp AQ,AQ\perp AB\cdots1$分

如图，以A为原点，AB,AQ,AA_1所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系，由于$AB=AA_1=2A_1B_1=6$，所以$AQ=2\sqrt{3}$，

则$Q\left(0,2\sqrt{3},0\right),C\left(-3,3\sqrt{3},0\right),C_1\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2},6\right)\cdots2$分

又$\overrightarrow{CP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$，所以$\left(x_P+3,y_P-3\sqrt{3},z_P\right)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},6\right)=\left(1,-\sqrt{3},4\right)$，则

$P\left(-2,2\sqrt{3},4\right)$，所以$\overrightarrow{PQ}=\left(-2,0,4\right)\cdots3$分

又y轴$\perp$面AA_1B_1B，故$\vec{n}=\left(0,1,0\right)$为平面$AA_1B_1B$的法向量

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=0$，又$PQ\not\subset$面$AA_1B_1B\cdots4$分，

所以$PQ//$面$AA_1B_1B\cdots5$分

解法二：因为$AA_1\perp AB$，所以$AA_1\perp AC$，所以$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=\theta=120^\circ$，由于$AQ\perp AB$，$AB=AA_1=2A_1B_1=6$，所以$AQ=CQ=2\sqrt{3},BQ=4\sqrt{3}\cdots1$分，

取AC上一点M，使$AM=2MC$，$\because BQ=2QC$，

连接QM,MP，

$\therefore QM // AB$, 又 $\because QM \not\subset$ 面 AA_1B_1B, $AB \subset$ 面 AA_1B_1B $\therefore QM //$ 面 $AA_1B_1B \cdots 2$分

过点 C_1 作 A_1A 的平行线交 AC 于点 N，

在 ΔCNC_1 中，$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$，$\therefore MP // C_1N$, $\because C_1N // AA_1 \therefore MP // AA_1$

又 $\because MP \not\subset$ 面 AA_1B_1B, $AA_1 \subset$ 面 AA_1B_1B $\therefore MP //$ 面 $AA_1B_1B \cdots 4$分

又 $\because QM \cap MP = M$, $\therefore$ 面 $QMP //$ 面 AA_1B_1B, $\because PQ \subset$ 面 AA_1B_1B

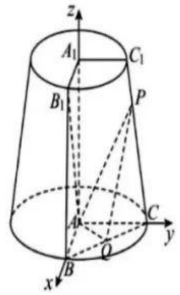
$\therefore PQ //$ 面 $AA_1B_1B \cdots 5$分

（2）因为 $AA_1 \perp AB$，所以 $AA_1 \perp AC$，所以 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = \theta = 90^\circ$

如图，以 A 为原点，AB, AQ, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则 $Q(3,3,0), C(0,6,0), C_1(0,3,6), B(6,0,0)$，设 $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CC_1}(0 \le \lambda \le 1) = (0,-3\lambda,6\lambda)$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CP} = (3,-3+3\lambda,-6\lambda) \cdots 6$分



又 x轴 $\perp$ 面 AA_1C_1C, 所以面 AA_1C_1C 的法向量 $\vec{m} = (1,0,0)$

设 PQ 与面 AA_1C_1C 的成角为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

则 $\sin\alpha = \left|\cos\left\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{m}\right\rangle\right| = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\vec{m}\right|} = \frac{3}{\sqrt{45\lambda^2 - 18\lambda + 18}} \cdots 7$ 分

所以当 $\lambda = \frac{1}{5}$ 时，$\sin\alpha_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 即 $\tan\alpha_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdots 8$分

设此时平面 APQ 的法向量 $\vec{p} = (x,y,z)$, $\overrightarrow{AQ} = (3,3,0)$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{PQ} = \left(0, \frac{27}{5}, \frac{6}{5}\right)$

$\begin{cases} \overrightarrow{AQ}\cdot\vec{p} = 3x + 3y = 0 \\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{p} = \frac{27}{5}y + \frac{6}{5}z = 0 \end{cases}$ $\therefore \vec{p} = (2,-2,9) \cdots 10$分，

$\cos\left\langle \vec{p}, \vec{m}\right\rangle = \frac{\vec{p}\cdot\vec{m}}{\left|\vec{p}\right|\left|\vec{m}\right|} = \frac{2}{1\times\sqrt{89}} = \frac{2\sqrt{89}}{89} \cdots 11$分，

因为二面角 $Q-AP-C$ 为锐角，即二面角 $Q-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{89}}{89}$，

所以 PQ 与面 AA_1C_1C 所成最大角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

此时二面角 $Q-AP-C$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{89}}{89}\cdots 12$分

22.（1）设点 $M(m,n)$,其中 $\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{n^2}{b^2}=1,-2\le m\le 2$，则

$$|AM|=\sqrt{(m-1)^2+n^2}=\sqrt{(m-1)^2+b^2\left(1-\frac{m^2}{4}\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{4}\right)m^2-2m+b^2+1}\cdots 2\text{分}$$

由 $|AM|\ge 1$,得 $\left(1-\dfrac{b^2}{4}\right)m^2-2m+b^2=(m-2)\left[\left(1-\dfrac{b^2}{4}\right)m-\dfrac{b^2}{2}\right]\ge 0\cdots 4$分

$\because m\le 2,0<b<2,\therefore\ m-2\le 0,1-\dfrac{b^2}{4}>0,\therefore\ \left(1-\dfrac{b^2}{4}\right)m-\dfrac{b^2}{2}\le 0$ 即 $m\le\dfrac{2b^2}{4-b^2}$

只需 $2\le\dfrac{2b^2}{4-b^2},\therefore\ \sqrt{2}\le b<2\cdots 6$分

（2）k_1,k_3,k_2 或 k_2,k_3,k_1 成等差数列.证明如下：$\cdots 7$分

若 $b=1$，则 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，设点 $E(1,t),t\ne 0$

①若直线 l 的斜率为 0,则点 $P(4,0)$,不妨令点 $M(2,0),N(-2,0)$,则 $k_1=-t,k_2=\dfrac{t}{3},k_3=-\dfrac{t}{3}$，

此时 k_1,k_2,k_3 的任意排列均不构成等比数列，k_1,k_3,k_2 或 k_2,k_3,k_1 成等差数列.$\cdots 8$分

②若直线 l 的斜率不为 0,

设直线 $l:x=my+1(m\ne 0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,易知点 $P\left(4,\dfrac{3}{m}\right)$.

由 $\begin{cases}x=my+1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0.\therefore\ y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+4}\cdots 10$分

因为 $k_1=\dfrac{y_1-t}{x_1-1},k_2=\dfrac{y_2-t}{x_2-1},k_3=\dfrac{\frac{3}{m}-t}{3}=\dfrac{3-mt}{3m}$，

$$k_1+k_2=\frac{y_1-t}{x_1-1}+\frac{y_2-t}{x_2-1}=\frac{y_1-t}{my_1}+\frac{y_2-t}{my_2}$$

所以 $=\dfrac{y_2(y_1-t)+y_1(y_2-t)}{my_1y_2}=\dfrac{2y_1y_2-t(y_1+y_2)}{my_1y_2}$

$$=\frac{\dfrac{-6}{m^2+4}+\dfrac{2mt}{m^2+4}}{\dfrac{-3m}{m^2+4}}=\frac{6-2mt}{3m}=2k_3$$

$\therefore$ k_1,k_3,k_2 或 k_2,k_3,k_1 成等差数列.

综上 k_1,k_3,k_2 或 k_2,k_3,k_1 成等差数列$\cdots$12分