按秘密级事项管理★启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

数学模拟测试（一）

本试卷共22题，共150分，考试时间120分钟，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内.
2. 选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，笔迹清楚.
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效.
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
5. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱.不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $\dfrac{(1-2i)^2}{i}=$

A. $3-4i$　　B. $-3-4i$　　C. $-4-3i$　　D. $-4+3i$

2. 已知集合 M、N 是全集 U 的两个非空子集，且 $M\subseteq \complement_U N$，则

A. $M\cap N=\varnothing$　　B. $M\subseteq N$　　C. $N\subseteq M$　　D. $N\cup \complement_U M=U$

3. 椭圆 $mx^2+y^2=1$ 的焦点在 y 轴上，短轴长与焦距相等，则实数 m 的值为

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 4　　D. $\sqrt{2}$

4. 若某圆台的上底面半径为2，下底面半径为4，高为3，则该圆台的体积为

A. $\dfrac{28\pi}{3}$　　B. 20π　　C. 28π　　D. 32π

5. 已知 $\tan\alpha=3$，则 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}=$

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. 6

6. 在1859年的时候，德国数学家黎曼向科学院提交了题目为《论小于某值的素数个数》的论文并提出了一个命题，也就是著名的黎曼猜想.在此之前，著名数学家欧拉也曾研究过这个问题，并得到小于数字 x 的素数个数可以表示为 $\pi(x)\approx\dfrac{x}{\ln x}$ 的结论.若根据欧拉得出的结论，估计 10^5 以内的素数的个数为(素数即质数，$\lg e\approx0.4343$，计算结果取整数)

A. 2172　　B. 4343　　C. 869　　D. 8686

7. $-x(x+\frac{1}{x}-2)^4$ 展开式中常数项是

A. 56　　B. -56　　C. 70　　D. -70

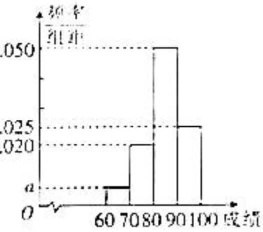
8. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$，直线 $y=mx+n$ 是曲线 $y=f(x)$的一条切线，则 $m+2n$ 的取值范围是

A. $[-3,+\infty)$　　B. $[-2\ln 2-4,+\infty)$

C. $(-\infty,\frac{e-3}{e^2}]$　　D. $[\ln 2-\frac{5}{4},+\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 为了庆祝中国共产党成立 100 周年，讴歌中华民族实现伟大复兴的奋斗历程，增进全体党员干部职工对党史的了解，某单位组织开展党史知识竞赛活动，将本单位全体党员党史知识竞赛的成绩（均位于[60，100]之内）整理，得到如图所示的频率分布直方图. 根据此频率分布直方图，下列结论正确的是



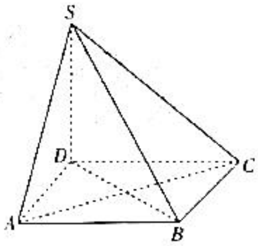
A. 本次成绩不低于 80 分的人数的占比为 75%

B. 本次成绩低于 70 分的人数的占比为 5%

C. 估计本次成绩的平均分不高于 85 分

D. 本次成绩位于[70，90)的人数是其他人数的 3 倍

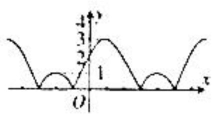
10. 如图所示，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为正方形，$SD\perp$底面 $ABCD$，$SD=AB$，则下列选项中两异面直线所成夹角大于 45°的是



A. BC 与 SD　　B. AB 与 SC

C. SB 与 AD　　D. AC 与 SB

11. 已知函数 $f(x)=A\cos(2x+\varphi)-1(A>0,0<\varphi<\pi)$，若函数 $y=|f(x)|$ 的部分图象如图所示，函数 $g(x)=A\sin(Ax-\varphi)$，则下列结论不正确的是



A. 函数 $g(x)$的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{12}$对称

B. 函数 $g(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{2},0)$对称

C. 将函数 $y=f(x)+1$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度可得到函数 $g(x)$的图象

D. 函数 $g(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的单调递减区间为$[0,\frac{\pi}{6}]$

12. 阿基米德（公元前 287 年—公元前 212 年）是古希腊伟大的物理学家、数学家、天文学家，不仅在物理学方面贡献巨大，还享有"数学之神"的称号. 抛物线上任意两点 A、B 处的切线交于点 P，称$\triangle PAB$ 为"阿基米德三角形". 已知抛物线 $C:x^2=8y$ 的焦点为 F，过 A、B 两点的直线的方程为$\sqrt{3}x-3y+6=0$，关于"阿基米德三角形"$\triangle PAB$，下列结论正确的是

A. $|AB|=\frac{32}{3}$　　B. $PA\perp PB$

C. 点 P 的坐标为$(\sqrt{3},-2)$　　D. $PF\perp AB$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，若$a_{[illegible]}a_{[illegible]}=4$，则$\log_2 a_{[illegible]}+\log_2 a_{[illegible]}=$______.

14. 写出一个同时满足下列条件①②的向量$a=$______.

①$|a|=1$；②向量a与$b=(1,-1)$的夹角$\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$.

15. 已知$f(x)=[x+\frac{f'(0)+1}{2}]e^x$，则函数$f(x)$的极小值为______.

16. 已知在正四面体$P-ABC$中，$AB=3$，记以PA为直径的球为球O，则平面ABC截球O所得截面的面积为______.

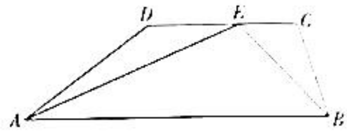
四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

如图，在梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，点E在边CD上，$\angle C=120°$，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle CEB=45°$.

(1)求BE，CE；

(2)若$AB=7$，求$\sin\angle AEB$.



18. (12分)

已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2^n}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

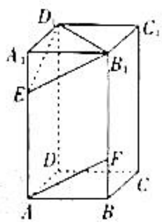
(2)对任意的$n\in N^*$，令$b_n=\begin{cases}a_n, n\text{ 为奇数}\\ 2^{a_n}, n\text{ 为偶数}\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$S_{2n}$.

19. (12分)

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E，F分别在AA_1，BB_1上，$A_1D_1=A_1B_1=A_1E=BF=1$，$AA_1=3$.

(1)证明：$AF\parallel$平面EB_1D_1.

(2)求二面角$B_1-D_1E-A_1$的余弦值.



20.（12分）

《中共中央国务院关于实现巩固拓展脱贫攻坚成果同乡村振兴有效衔接的意见》明确提出，支持脱贫地区乡村特色产业发展壮大，加快脱贫地区农产品和食品仓储保鲜、冷链物流设施建设，支持农产品流通企业、电商、批发市场与区域特色产业精准对接。当前，脱贫地区相关设施建设情况如何？怎样实现精准对接？未来如何进一步补齐发展短板？针对上述问题，假定有A,B,C三个解决方案，通过调查发现有$\frac{1}{2}$的受调查者赞成方案A，有$\frac{1}{3}$的受调查者赞成方案B，有$\frac{1}{6}$的受调查者赞成方案C，现有甲、乙、丙三人独立参加投票（以频率作为概率）.

(1)求甲、乙两人投票方案不同的概率；

(2)若某人选择方案A或方案B，则对应方案可获得2票，选择方案C，则方案C获得1票，设X是甲、乙、丙三人投票后三个方案获得票数之和，求X的分布列和数学期望.

21.（12分）

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，过双曲线$C$的右焦点$F(2,0)$的直线$l_1$与双曲线$C$分别交于左、右两支上的$A$、$B$两点.

(1)求双曲线C的方程.

(2)过原点O作直线l_2，使得$l_2/\!/l_1$，且与双曲线C分别交于左、右两支上的点M、N. 是否存在定值λ，使得$|\overrightarrow{MN}|\cdot\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AB}$？若存在，请求出$\lambda$的值；若不存在，请说明理由.

22.（12分）

已知函数$f(x)=ax-\sin x$.

(1)若函数$f(x)$为增函数，求实数a的取值范围；

(2)证明：当$x>0$时，$e^x>2\sin x$.

2022年普通高等学校招生全国统一考试
数学模拟测试参考答案

1. D 【命题意图】本题考查复数的四则运算，要求考生会进行复数的平方运算与除法运算.

【解题分析】$\frac{(1-2i)^2}{i}=\frac{-3-4i}{i}=-4+3i$.

2. A 【命题意图】本题考查集合间的关系，要求考生理解集合间的基本关系与集合间的交并补的运算.

【解题分析】因为 $M\subseteq\complement_U N$，所以 $M\cap N=\varnothing$.

3. A 【命题意图】本题考查椭圆的基本性质，要求考生掌握椭圆的标准方程及简单性质.

【解题分析】椭圆 $mx^2+y^2=1$ 的焦点在 y 轴上，所以 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+y^2=1$，所以 $b=\sqrt{\frac{1}{m}}$，$a=1$.

因为短轴长与焦距相等，所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=1$，解得 $m=2$.

4. C 【命题意图】本题考查台体的体积，要求考生会求解台体的体积，考查直观想象与数学运算素养.

【解题分析】该圆台的体积为 $\frac{1}{3}(\pi\times2^2+\pi\times4^2+\sqrt{\pi\times2^2\times\pi\times4^2})\times3=28\pi$.

5. B 【命题意图】本题考查三角恒等变换，要求考生能运用二倍角公式以及同角三角函数的基本关系进行化简求值.

【解题分析】$\frac{\sin2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\tan\alpha}=\frac{2}{3}$.

6. D 【命题意图】本题以黎曼猜想为背景，要求考生运用所学对数的运算公式解答相关问题. 本题主要考查获取信息、运用所学知识解决实际问题的能力，体现了数学运算的学科素养，突出了基础性、应用性的考查要求.

【解题分析】$\pi(10^5)\approx\frac{10^5}{\ln10^5}=\frac{10^5}{5\ln10}=\frac{2\times10^4}{\ln10}=2\times10^4\times\lg e\approx2\times10^4\times0.4343=2\times4343=8686$.

7. A 【命题意图】本题考查二项式定理，要求考生能用二项式定理解决与二项展开式有关的问题.

【解题分析】$-x(x+\frac{1}{x}-2)^4=-x(\frac{x^2-2x+1}{x})^4=-x(x-1)^8(\frac{1}{x})^4=-\frac{(x-1)^8}{x^3}$，$(x-1)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=(-1)^rC_8^rx^{8-r}(r=0,1,2,\cdots,8)$，

令 $8-r=3$，得 $r=5$，$(-1)^5C_8^5=-56$，

所以展开式中常数项是56.

8. B 【命题意图】本题考查导数的几何意义与函数的最值，要求考生理解导数的几何意义，会运用导数求函数的最值.

【解题分析】设切点为 $P(t,f(t))$，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，曲线 $y=f(x)$ 在切点 $P(t,f(t))$ 处的切线斜率为 $k=f'(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$，切线方程为 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$，整理得 $y=(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2})x+\ln t-\frac{2}{t}-1$，所以 $m+2n=\frac{1}{t^2}+2\ln t-\frac{3}{t}-2$. 令 $g(t)=\frac{1}{t^2}+2\ln t-\frac{3}{t}-2$，则 $g'(t)=\frac{2t^2+3t-2}{t^3}$. 当 $0<t<\frac{1}{2}$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减；当 $t>\frac{1}{2}$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增. 故 $g(t)_{min}=g(\frac{1}{2})=-2\ln2-4$，则 $m+2n$ 的取值范围是 $[-2\ln2-4,+\infty)$.

9. ABC 【命题意图】本题以庆祝中国共产党成立100周年为情境，要求考生运用所学频率分布直方图与样本

的数字特征等必备知识解答相关问题. 主要考查获取信息、运用所学知识解决实际问题的能力，体现了数学运算与数据分析的学科素养，突出基础性、应用性的考查要求.

【解题分析】本次成绩不低于80分的人数的占比为$(0.050+0.025)\times10=0.75=75\%$，故A项正确；

因为$10(a+0.020+0.050+0.025)=1$，所以$a=0.005$，故B项正确；

因为有50%的党员的成绩位于$[80,90)$之间，这部分党员的平均成绩为85分，另有25%的党员的成绩位于$[90,100]$，这部分党员的平均成绩为95，剩余党员的平均成绩小于75分，所以估计本次成绩的平均分不高于85分，故C项正确；成绩位于$[70,90)$的频率为$(0.020+0.050)\times10=0.7$，因为$0.7<0.3\times3$，所以D项错误.

10. ACD 【命题意图】本题考查异面直线的夹角，要求考生会通过平移的方法求异面直线的夹角以及利用判定定理证明异面直线的垂直.

【解题分析】对于A，因为$SD\perp$底面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，所以$SD\perp BC$，则BC与SD所成角的大小为90°，A项符合. 对于B，因为底面$ABCD$是正方形，所以$AB/\!/CD$，则AB与SC所成的角为$\angle SCD=45^\circ$，B项不符合. 对于C，因为$AD/\!/BC$，所以SB与AD所成的角为$\angle SBC$，由题知$\tan\angle SBC=\frac{SC}{BC}=\sqrt{2}>1$，所以$\angle SBC>45^\circ$，C项符合. 对于D，因为$SD\perp$底面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，所以$SD\perp AC$. 因为$ABCD$是正方形，所以$AC\perp BD$. 因为$SD\cap BD=D$，所以$AC\perp$平面$SBD$. 因为$SB\subset$平面$SBD$，所以$AC\perp SB$，则$AC$与$SB$所成角的大小为$90^\circ$，D项符合.

11. ABD 【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，要求考生了解函数图象的变换，了解函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)+B$中各参数对图象的影响，理解正弦函数与余弦函数的单调性与对称性.

【解题分析】根据函数$y=|f(x)|$的图象可知$A=2$，当$x=0$时，满足$f(0)=-2$，则$2\cos\varphi-1=-2$，即$\cos\varphi=-\frac{1}{2}$，因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，$g(x)=2\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$.

对于A项，当$x=-\frac{\pi}{12}$时，$g(-\frac{\pi}{12})=-1$，故函数$g(x)$的图象不关于直线$x=-\frac{\pi}{12}$对称，A项错误；对于B项，当$x=\frac{\pi}{2}$时，$g(\frac{\pi}{2})=\sqrt{3}$，故函数$g(x)$的图象不关于点$(\frac{\pi}{2},0)$对称，B项错误；对于C项，因为$y=f(x)+1=2\cos(2x+\frac{2\pi}{3})=2\sin[(2x+\frac{2\pi}{3})-\frac{3\pi}{2}]=2\sin(2x-\frac{5\pi}{6})$，将其图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度可得函数$y=2\sin[2(x+\frac{\pi}{12})-\frac{5\pi}{6}]=2\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$的图象，故C项正确；对于D项，因为$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以$2x-\frac{2\pi}{3}\in[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，所以当$2x-\frac{2\pi}{3}\in[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}]$，即$x\in[0,\frac{\pi}{12}]$时，$g(x)$单调递减，D项错误.

12. ABD 【命题意图】本题考查直线与抛物线的位置关系，要求考生了解抛物线的定义、几何图形和标准方程，知道它的简单几何性质.

【解题分析】设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}x^2=8y\\ \sqrt{3}x-3y+6=0\end{cases}$，可得$3x^2-8\sqrt{3}x-48=0$，

解得$x=4\sqrt{3}$或$x=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$，不妨设$x_1=4\sqrt{3}$，$x_2=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则$y_1=6$，$y_2=\frac{2}{3}$，

故$A(4\sqrt{3},6)$，$B(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})$，$|AB|=\sqrt{(4\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3})^2+(6-\frac{2}{3})^2}=\frac{32}{3}$，A项正确；

又因为$y=\frac{x^2}{8}$，所以$y'=\frac{x}{4}$，故直线PA的斜率为$\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$，直线$PA$的方程为$y-6=\sqrt{3}(x-4\sqrt{3})$，即$y=\sqrt{3}x-6$，同理可得直线$PB$的方程为$y=-\frac{\sqrt{3}x}{3}-\frac{2}{3}$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=-1$，所以$PA\perp PB$，B项

正确；

联立$\begin{cases} y=\sqrt{3}x-6 \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}x}{3}-\dfrac{2}{3} \end{cases}$，可得$\begin{cases} x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=-2 \end{cases}$，故点 P 的坐标为$(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},-2)$，C 项错误；

易知点 F 的坐标为$(0,2)$，$k_{PF}=\dfrac{2+2}{0-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}$，$k_{PF}\cdot k_{AB}=-\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-1$，所以 $PF\perp AB$，D 项正确.

13. 2 【命题意图】本题考查等比数列的性质，要求考生理解等比数列的概念与性质.

【解题分析】$\log_2 a_2+\log_2 a_{10}=\log_2(a_2a_{10})=\log_2(a_4a_8)=\log_2 4=2$.

14. $(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2})$（答案不唯一） 【命题意图】本题考查向量的概念，要求考生理解向量的模与向量的夹角的概念.

【解题分析】$|\boldsymbol{a}|=1$，可设 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，又向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$的夹角 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，所以 $\theta\in(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{4})\cup(\dfrac{7\pi}{4},2\pi)$，在该区间任取一个角 θ 即可.

15. $-e^{-3}$ 【命题意图】本题考查函数的极值，要求考生会用导数求函数的极小值.

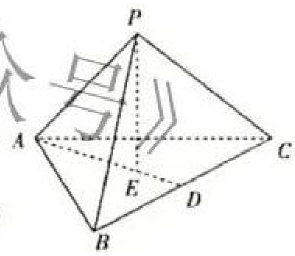
【解题分析】由 $f(x)=[x+\dfrac{f'(0)+1}{2}]e^x$，得 $f'(x)=[x+\dfrac{f'(0)+3}{2}]e^x$，令 $x=0$，

得 $f'(0)=\dfrac{f'(0)+3}{2}$，解得 $f'(0)=3$，所以 $f(x)=(x+2)e^x$，$f'(x)=(x+3)e^x$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$，则函数 $f(x)$在$(-\infty,-3)$上单调递减，在$(-3,+\infty)$上单调递增，

所以当 $x=-3$ 时，$f(x)$取得极小值，且极小值为 $f(-3)=-e^{-3}$.

16. $\dfrac{3\pi}{4}$ 【命题意图】本题考查平面与球的截面问题，要求考生了解正四面体与球的特征，会根据空间中的垂直关系求出截面圆的直径.



【解题分析】如图，取 BC 的中点 D，连接 AD，过点 P 作 $PE\perp$平面 ABC 于点 E，由正四面体 $P-ABC$ 的特征可知，点 E 为 AD 上靠近点 D 的三等分点.

因为 PA 为球 O 的直径，$PE\perp$平面 ABC，$\angle AEP=90^\circ$，所以平面 ABC 截球 O 所得截面的直径为 AE. 因为 $AB=3$，所以 $AE=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

故平面 ABC 截以 PA 为直径的球所得截面面积为 $\pi\times(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=\dfrac{3\pi}{4}$.

17.【命题意图】本题考查解三角形，要求考生能够运用正弦定理与余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

【解题分析】(1)因为 $BC=2\sqrt{3}$，$\angle CEB=45^\circ$，$\angle C=120^\circ$，所以$\angle CBE=15^\circ$. ………………………… 1分

在$\triangle EBC$ 中，由正弦定理$\dfrac{BC}{\sin\angle CEB}=\dfrac{BE}{\sin\angle C}=\dfrac{CE}{\sin\angle CBE}$，

可得$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{BE}{\sin 120^\circ}=\dfrac{CE}{\sin 15^\circ}$，………………………… 3分

可得 $BE=\dfrac{2\sqrt{3}\times\sin 120^\circ}{\sin 45^\circ}=3\sqrt{2}$，………………………… 4分

$CE=\dfrac{2\sqrt{3}\times\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}=3-\sqrt{3}$. ………………………… 5分

(2)因为 $AB/\!/CD$，所以$\angle CEB=\angle ABE=45^\circ$. ………………………… 6分

在$\triangle AEB$中，由余弦定理可得$EA^2=EB^2+AB^2-2EB\cdot AB\cdot\cos 45^\circ=(3\sqrt{2})^2+7^2-2\times3\sqrt{2}\times7\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25$，所以$EA=5$. ………………………………………… 8分

因为$\cos\angle AEB=\frac{EA^2+EB^2-AB^2}{2EA\cdot EB}=\frac{25+18-49}{2\times5\times3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以$\sin\angle AEB=\frac{7\sqrt{2}}{10}$. ………………………… 10分

18.【命题意图】本题考查数列的通项与求和，要求考生掌握求常见数列的通项的方法，能根据数列的通项的特征选取恰当的方法求和.

【解题分析】(1)当$n=1$时，$a_1=1$； ………………………………………………………… 1分

当$n\geqslant2$时，可得$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{n-1}{2^{n-1}}$， ………………………………………… 2分

所以$\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2^n}-\frac{n-1}{2^{n-1}}=\frac{2-n}{2^n}$， ………………………………………………… 3分

$a_n=2-n$， ………………………………………………………………………… 4分

当$n=1$时，$a_1=2-1=1$也符合，故$a_n=2-n$. ………………………………………… 5分

(2)由(1)知$b_n=\begin{cases}2-n, n\text{为奇数}\\2^{2-n}, n\text{为偶数}\end{cases}$. ……………………………………………… 6分

$S_{2n}=[1+(-1)+(-3)+\cdots+2-(2n-1)]+(2^0+2^{-2}+\cdots+2^{2-2n})$ ………………………… 8分

$=\frac{(1+3-2n)n}{2}+\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}=(2-n)n+\frac{4}{3}(1-\frac{1}{4^n})$ ………………………………… 10分

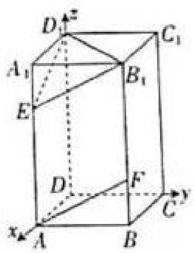
$=-n^2+2n-\frac{4}{3}-\frac{1}{3\times4^{n-1}}$. ………………………………………………… 12分

19.【命题意图】本题考查线面平行的证明与求二面角，要求考生能运用线面平行的判定定理证明问题，能用向量方法解决平面与平面的夹角的计算问题，了解向量方法在研究立体几何问题中的应用.

【解题分析】(1)因为$A_1E=BF=1$，所以$AE=B_1F=2$， ……………………………………… 2分

因为$AE/\!/FB_1$，所以四边形AFB_1E为平行四边形，所以$AF/\!/B_1E$. ……………………… 4分

因为$AF\not\subset$平面EB_1D_1，$B_1E\subset$平面EB_1D_1，所以$AF/\!/$平面EB_1D_1. ……………………… 5分



(2)法一，如图，以D为坐标原点建立空间直角坐标系$D-xyz$，

则$E(1,0,2)$，$A_1(1,0,3)$，$D_1(0,0,3)$，$B_1(1,1,3)$， ………………………… 6分

$\overrightarrow{D_1E}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{D_1B_1}=(1,1,0)$. ………………………………… 7分

设平面EB_1D_1的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{D_1E}\\\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{D_1B_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=z\\x=-y\end{cases}$， ………………………………… 8分

令$x=1$，得$y=-1$，$z=1$，所以$\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$. ………………………………………… 9分

易知$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$为平面D_1EA_1的一个法向量， ……………………………………… 10分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$， ………………………………………… 11分

由图可知，二面角$B_1-D_1E-A_1$为锐角，

故二面角$B_1-D_1E-A_1$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………… 12分

法二，取D_1E的中点G，连接A_1G，B_1G， ………………………………………………… 6分

因为$A_1D_1=A_1E=1$，所以$A_1G\perp D_1E$. ……………………………………………… 7分

又因为在长方体中，$A_1B_1\perp$ 平面 D_1A_1E，$D_1E\subset$ 平面 D_1A_1E，

所以 $A_1B_1\perp D_1E$. ………………………………………… 8 分

因为 $A_1G\cap A_1B_1=A_1$，所以 $D_1E\perp$ 平面 A_1B_1G，所以 $D_1E\perp B_1G$，

所以 $\angle B_1GA_1$ 为二面角 $B_1-D_1E-A_1$ 的平面角，………………………………………… 9 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1A_1G$ 中，$GA_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$GB_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，………………………………………… 10 分

所以 $\cos\angle B_1GA_1=\frac{GA_1}{GB_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$， ………………………………………… 11 分

所以二面角 $B_1-D_1E-A_1$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题以脱贫攻坚与乡村振兴为情境，要求考生运用所学独立事件的概率与离散型随机变量及其分布等必备知识解答相关问题. 主要考查获取信息、运用所学知识解决实际问题的能力，体现了数学运算与数据分析的学科素养，突出基础性、应用性的考查要求.

【解题分析】(1)因为甲、乙两人投票方案相同的概率

为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$， ………………………………………… 2 分

所以甲、乙两人投票方案不相同的概率为 $1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$. ………………………………………… 4 分

(2)X 的所有可能取值为 3，4，5，6. ………………………………………… 5 分

因为 $P(X=3)=(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{216}$， ………………………………………… 6 分

$P(X=4)=C_3^2(\frac{1}{6})^2\times(1-\frac{1}{6})=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$， ………………………………………… 7 分

$P(X=5)=C_3^1\,\frac{1}{6}\times(1-\frac{1}{6})^2=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$， ………………………………………… 8 分

$P(X=6)=C_3^3(1-\frac{1}{6})^3=\frac{125}{216}$， ………………………………………… 9 分

所以 X 的分布列如下：

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{216}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{125}{216}$

………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=3\times\frac{1}{216}+4\times\frac{5}{72}+5\times\frac{25}{72}+6\times\frac{125}{216}=\frac{11}{2}$. ………………………………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查直线与双曲线的综合，要求考生了解双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道它的简单几何性质.

【解题分析】(1)∵双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，

$\therefore\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}a$. ………………………………………… 2 分

又∵右焦点 F 的坐标为(2，0)，$\therefore c=2$，$c^2=a^2+b^2=a^2+3a^2=4a^2=4$，$a=1$，$b=\sqrt{3}$. ………………………………………… 4 分

∴双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 5 分

(2)存在定值 $\lambda=2$，使得 $|\overrightarrow{MN}|\cdot\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AB}$. ………………………………………… 6 分

$\because \overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向，$\therefore \lambda=\dfrac{|\overrightarrow{MN}|^2}{|\overrightarrow{AB}|}$.

由题可设直线 $l_1: x=ty+2$，联立$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\\x=ty+2\end{cases}$，可得$(3t^2-1)y^2+12ty+9=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\therefore \begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-12t}{3t^2-1}\\y_1y_2=\dfrac{9}{3t^2-1}\end{cases}$，……………………………………………………………… 7 分

由直线 l_1 分别交双曲线 C 的左、右两支于 A、B 两点，

可得$\begin{cases}3t^2-1\neq0\\(12t)^2-36(3t^2-1)=36(t^2+1)>0\\x_1x_2<0\end{cases}$，即$\begin{cases}3t^2-1\neq0\\(ty_1+2)(ty_2+2)=\dfrac{-(3t^2+4)}{3t^2-1}<0\end{cases}$，则 $3t^2-1>0$，…… 9 分

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{-12t}{3t^2-1}\right)^2-\dfrac{36}{3t^2-1}}=\dfrac{6(t^2+1)}{3t^2-1}$.

……………………………………………………………………………………………… 10 分

由 $l_2/\!/l_1$ 可设 $l_2: x=ty$，由$\begin{cases}x=ty\\3x^2-y^2=3\end{cases}$消去 x 并整理得$(3t^2-1)y^2=3$. 设 $M(x_0,y_0)$，$N(-x_0,-y_0)$，

$\therefore y_0^2=\dfrac{3}{3t^2-1}$，

则$|\overrightarrow{MN}|^2=(\sqrt{1+t^2}\,|y_0-(-y_0)|)^2=(1+t^2)\cdot4y_0^2=\dfrac{12(1+t^2)}{3t^2-1}$，

$\therefore \lambda=\dfrac{|\overrightarrow{MN}|^2}{|\overrightarrow{AB}|}=2$，故存在定值 $\lambda=2$，使得 $|\overrightarrow{MN}|\cdot\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AB}$. ………………………… 12 分

22.【命题意图】本题考查由函数的单调性求参数范围与证明不等式，要求考生掌握利用导数判断函数的单调性与利用放缩法证明不等式.

【解题分析】(1)$f'(x)=a-\cos x$. ………………………………………………………… 1 分

若函数 $f(x)$ 为增函数，则 $f'(x)=a-\cos x\geq0$ 恒成立，

即 $a\geq\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立. ………………………………………………………… 2 分

$\because y=\cos x\in[-1,1]$，$\therefore a\geq1$，……………………………………………………… 3 分

即实数 a 的取值范围是$[1,+\infty)$. ……………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知当 $a=1$ 时，$f(x)$ 为增函数. …………………………………………………… 5 分

又$\because f(0)=0$，$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即当 $x>0$ 时，$x>\sin x$. ……………… 6 分

要证当 $x>0$ 时，$e^x>2\sin x$，只需证当 $x>0$ 时，$e^x>2x$，

即证明 $e^x-2x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ………………………………………………… 8 分

设 $g(x)=e^x-2x$，则 $g'(x)=e^x-2$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\ln 2$，

则 $g(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 9 分

$\because g(x)_{\min}=g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$，…………………………… 10 分

$\therefore g(x)\geq g(\ln 2)>0$，…………………………………………………………………… 11 分

$\therefore e^x>2x$，可得 $e^x>2\sin x$，命题得证. ……………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。