

海淀区 2022—2023 学年第一学期期末练习

高三数学

2023.01

数

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

- (1) 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cup B =$
(A) $[-2, 3]$ (B) $[0, 3]$ (C) $(0, +\infty)$ (D) $[-2, +\infty)$
- (2) 在复平面内, 复数 $\frac{1}{2-i}$ 对应的点在
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- (3) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$, 在下列区间中, 包含 $f(x)$ 零点的区间是
(A) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (B) $(\frac{1}{2}, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$
- (4) 已知 $a = \lg 5$, $b = \sin \frac{\pi}{7}$, $c = 2^{\frac{1}{3}}$, 则
(A) $a < b < c$ (B) $b < a < c$ (C) $b < c < a$ (D) $a < c < b$
- (5) 若圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2ay + a^2 = 0$ 截直线 $x - 2y + 1 = 0$ 所得弦长为 2, 则 $a =$
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
- (6) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 = 3$, $a_4 + a_6 = -10$. 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n + a_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_8 =$
(A) -32 (B) -80 (C) -192 (D) -224
- (7) 某校高一年级计划举办足球比赛, 采用抽签的方式把全年级 6 个班分为甲、乙两组, 每组 3 个班, 则高一(1)班、高一(2)班恰好都在甲组的概率是
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$
- (8) 设 α, β 是两个不同的平面, 直线 $m \subset \alpha$, 则“对 β 内的任意直线 l , 都有 $m \perp l$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

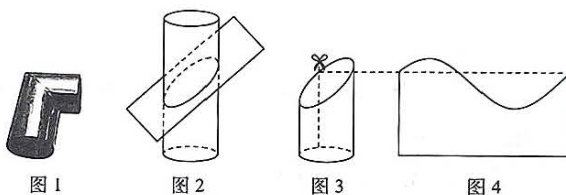
高三年级(数学) 第1页(共4页)

(9) 已知函数 $f(x) = \cos 2x$ 在区间 $[t, t + \frac{\pi}{3}]$ ($t \in \mathbf{R}$) 上的最大值为 $M(t)$, 则 $M(t)$ 的最小值为

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

(10) 在实际生活中, 常常要用到如图 1 所示的“直角弯管”. 它的制作方法如下: 如图 2, 用一个与圆柱底面所成角为 45° 的平面截圆柱, 将圆柱截成两段, 再将这两段重新拼接就可以得到“直角弯管”. 在制作“直角弯管”时截得的截面是一个椭圆, 若将圆柱被截开的一段 (如图 3) 的侧面沿着圆柱的一条母线剪开, 并展开成平面图形, 则截面展开形成的图形恰好是某正弦型函数的部分图象 (如图 4). 记该正弦型函数的最小正周期为 T , 截面椭圆的离心率为 e . 若圆柱的底面直径为 2, 则

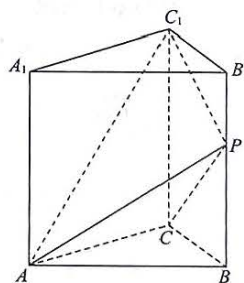
- (A) $T = 2\pi, e = \frac{1}{2}$
 (B) $T = 2\pi, e = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 (C) $T = 4\pi, e = \frac{1}{2}$
 (D) $T = 4\pi, e = \frac{\sqrt{2}}{2}$



第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

- (11) 抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点坐标为 _____ .
 (12) 在 $(x - \frac{2}{x})^4$ 的展开式中, x^2 的系数为 _____ .
 (13) 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, P 是棱 BB_1 上一点, $AB = AA_1 = 2$,
 则三棱锥 $P-ACC_1$ 的体积为 _____ .
 (14) 设 O 为原点, 双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , 点 P 在 C 的右支上.
 则 C 的渐近线方程是 _____ ; $\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 的取值范围是 _____ .



- (15) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2t$, $g(x) = e^x - t$. 给出下列四个结论:
 ① 当 $t = 0$ 时, 函数 $y = f(x)g(x)$ 有最小值;
 ② $\exists t \in \mathbf{R}$, 使得函数 $y = f(x)g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增;
 ③ $\exists t \in \mathbf{R}$, 使得函数 $y = f(x) + g(x)$ 没有最小值;
 ④ $\exists t \in \mathbf{R}$, 使得方程 $f(x) + g(x) = 0$ 有两个根且两根之和小于 2.
 其中所有正确结论的序号是 _____ .

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)。用五点法画 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}]$ 上的图象时，取点列表如下：

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0

(I) 直接写出 $f(x)$ 的解析式及其单调递增区间；

(II) 在 $\triangle ABC$ 中， $f(B) = \frac{1}{2}$ ， $b = 2\sqrt{3}$ ， $a + c = 6$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

(17) (本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp DC$ ， $AB \parallel DC$ ， $AB = \frac{1}{2}DC$ ， $PD = AD = 1$ ， M 为棱 PC 的中点。

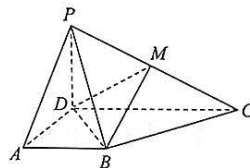
(I) 证明： $BM \parallel$ 平面 PAD ；

(II) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角 $P-DM-B$ 的余弦值。

条件①： $PB = \sqrt{3}$ ；

条件②： $BD \perp BC$ 。

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。



(18) (本小题 14 分)

H 地区农科所统计历年冬小麦每亩产量的数据，得到频率分布直方图（如图 1），考虑到受市场影响，预测该地区明年冬小麦统一收购价格情况如表 1（该预测价格与亩产量互不影响）。

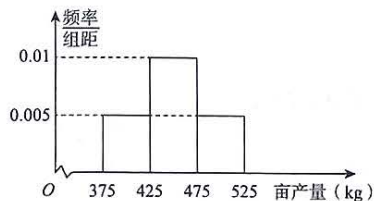


图 1

明年冬小麦统一收购价格 (单位：元/kg)	2.4	3
概率	0.4	0.6

表 1

假设图 1 中同组的每个数据用该组区间的中点值估算，并以频率估计概率。

(I) 试估计 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 1500 元的概率；

(II) 设 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 X 元，求 X 的分布列和数学期望；

(III) H 地区农科所研究发现，若每亩多投入 125 元的成本进行某项技术改良，则可使每亩冬小麦产量平均增加 50 kg。从广大种植户的平均收益角度分析，你是否建议农科所推广该项技术改良？并说明理由。

(19) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = x \ln(x+1)$.

(I) 判断 0 是否为 $f(x)$ 的极小值点, 并说明理由;

(II) 证明: $\frac{f(x)}{x^2} > -\frac{1}{2}x+1$.

(20) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $P(-2, 1)$ 和 $Q(2\sqrt{2}, 0)$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过点 $G(0, 2)$ 作直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 A, B , 直线 PA 交 y 轴于点 M , 直线 PB 交 y 轴于点 N . 若 $|GM| \cdot |GN| = 2$, 求直线 l 的方程.

(21) (本小题 15 分)

对于一个有穷正整数数列 Q , 设其各项为 a_1, a_2, \dots, a_n , 各项和为 $S(Q)$, 集合 $\{(i, j) | a_i > a_j, 1 \leq i < j \leq n\}$ 中元素的个数为 $T(Q)$.

(I) 写出所有满足 $S(Q) = 4, T(Q) = 1$ 的数列 Q ;

(II) 对所有满足 $T(Q) = 6$ 的数列 Q , 求 $S(Q)$ 的最小值;

(III) 对所有满足 $S(Q) = 2023$ 的数列 Q , 求 $T(Q)$ 的最大值.

海淀区2022—2023学年第一学期期末练习

高三数学

参考答案

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	D	B	C	B	C	A	D	B

二、填空题

(11) $(\frac{1}{2}, 0)$

(12) -8

(13) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(14) $y = \pm\sqrt{3}x; (1, 2)$

(15) ①②④

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题13分)

解：(I) $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$,

单调递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$.

(II) 由 (I) 可知 $f(B) = \sin(2B + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < B < \pi$,

所以 $\frac{\pi}{6} < 2B + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6}$.

所以 $2B + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

即 $B = \frac{\pi}{3}$.

由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

即 $12 = a^2 + c^2 - ac$.

即 $12 = (a+c)^2 - 3ac$.

即 $12 = 36 - 3ac$.

即 $ac = 8$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = 2\sqrt{3}$.

(17) (本小题 14 分)

解: (I) 取 PD 中点 N , 连接 AN, MN .

在 $\triangle PCD$ 中, M, N 分别为 PC, PD 的中点, 所以 $MN \parallel DC$, $MN = \frac{1}{2}DC$,

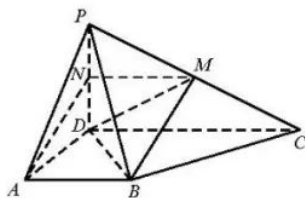
因为 $AB \parallel DC$, $AB = \frac{1}{2}DC$,

所以 $AB \parallel MN$, $AB = MN$.

所以四边形 $ABMN$ 为平行四边形, 因此 $BM \parallel AN$.

又因为 $BM \not\subset$ 平面 PAD , $AN \subset$ 平面 PAD ,

所以 $BM \parallel$ 平面 PAD .



(II) 选择条件①

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD, DC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp AD$, $PD \perp DC$. 又因为 $AD \perp DC$,

所以建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$.

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PD \perp BD$.

所以在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中, $PD = 1$, $PB = \sqrt{3}$, 可得 $BD = \sqrt{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD = 1$, $BD = \sqrt{2}$, 所以 $AB = 1$, 又因为 $AB = \frac{1}{2}DC$, 所以 $DC = 2$.

由题意得 $D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,2,0)$, $P(0,0,1)$, $M(0,1,\frac{1}{2})$,

所以 $\overrightarrow{DA} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{DM} = (0,1,\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{DB} = (1,1,0)$.

设平面 BDM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{所以} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DM} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y + \frac{1}{2}z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

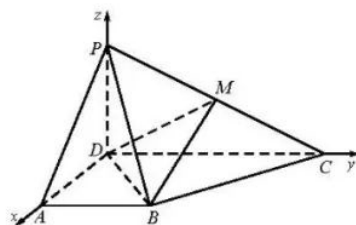
令 $y = -1$, 则 $x = 1, z = 2$.

所以平面 BDM 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$.

易知 \overrightarrow{DA} 为平面 PDM 的一个法向量.

$$\text{所以} \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{DA} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA}}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{DA}|} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot 1} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

因为二面角 $P-DM-B$ 为钝角, 所以二面角 $P-DM-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.



选择条件②

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD, DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AD$, $PD \perp DC$, 又因为 $AD \perp DC$, 所以建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$.

取 CD 的中点 E , 连接 BE .

因为 $AB \parallel DC$, $AB = \frac{1}{2}DC$, 所以 $AB \parallel DE$, $AB = DE$,

又因为 $AD \perp DC$, 所以四边形 $ABED$ 为矩形.

在 $\triangle BCD$ 中, 因为 $BD \perp BC$, 所以 $BE = \frac{1}{2}DC$.

又因为 $AB = \frac{1}{2}DC$, 所以 $AB = BE$.

所以四边形 $ABED$ 为正方形, 即 $AB = AD = 1$, $DC = 2$.

由题意得 $D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,2,0)$, $P(0,0,1)$, $M(0,1,\frac{1}{2})$,

所以 $\overrightarrow{DA} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{DM} = (0,1,\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{DB} = (1,1,0)$.

设平面 BDM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DM} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y + \frac{1}{2}z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

令 $y = -1$, 则 $x = 1, z = 2$.

所以平面 BDM 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$.

易知 \overrightarrow{DA} 为平面 PDM 的一个法向量.

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{DA} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA}}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{DA}|} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot 1} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

因为二面角 $P-DM-B$ 为钝角, 所以二面角 $P-DM-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(18) (本小题 14 分)

解: (I) 由图可知, 亩产量是 400 kg 的概率约为 $0.005 \times 50 = 0.25$, 亩产量是 450 kg 的概率约为 $0.01 \times 50 = 0.5$, 亩产量是 500 kg 的概率约为 $0.005 \times 50 = 0.25$.

估计 H 地区明年每亩小麦统一收购总价为 1500 元的概率为 $0.25 \times 0.6 = 0.15$.

(II) X 的所有可能取值为 960, 1080, 1200, 1350, 1500.

$$P(X=960) = 0.25 \times 0.4 = 0.1, \quad P(X=1080) = 0.5 \times 0.4 = 0.2,$$

$$P(X=1200) = 0.25 \times 0.4 + 0.25 \times 0.6 = 0.1 + 0.15 = 0.25,$$

$$P(X=1350) = 0.5 \times 0.6 = 0.3, \quad P(X=1500) = 0.25 \times 0.6 = 0.15.$$

X 的分布列为

X	960	1080	1200	1350	1500
P	0.1	0.2	0.25	0.3	0.15

$$E(X) = 960 \times 0.1 + 1080 \times 0.2 + 1200 \times 0.25 + 1350 \times 0.3 + 1500 \times 0.15 = 1242.$$

(3) 建议农科所推广该项技术改良.

设增产前每亩冬小麦产量为 ξ kg, 增产后每亩冬小麦产量为 η kg, 则 $\eta = \xi + 50$.

设增产后的每亩冬小麦总价格为 Y 元,

由分析可知 $E(Y) = E(X) + 50 \times (2.4 \times 0.4 + 3 \times 0.6)$

所以增产的 50 kg 会产生增加的收益是 $50 \times (2.4 \times 0.4 + 3 \times 0.6) = 138 > 125$, 故建议农科所推广该项技术改良.

19. (本小题 14 分)

(I) 解法一: 0 是 $f(x)$ 的极小值点,

理由如下:

当 $x > 0$ 时, $\ln(x+1) > 0$, 所以 $f(x) = x \ln(x+1) > 0$.

当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < x+1 < 1$, 可知 $\ln(x+1) < 0$, 所以 $f(x) = x \ln(x+1) > 0$.

而 $f(0) = 0$,

由极小值点的定义知, 0 是 $f(x)$ 的极小值点.

(I) 解法二: 0 是 $f(x)$ 的极小值点,

理由如下:

对函数求导得 $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

当 $x > 0$ 时, $\ln(x+1) > 0, \frac{x}{x+1} > 0$,

所以 $f'(x) > 0$.

当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < x+1 < 1$, 可知 $\ln(x+1) < 0, \frac{x}{x+1} < 0$,

所以 $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减.

所以 0 是 $f(x)$ 的极小值点.

(II) 证明: $\frac{f(x)}{x^2} > -\frac{1}{2}x+1$ 等价于 $\frac{\ln(x+1)}{x} > -\frac{1}{2}x+1$, 即 $\frac{\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x}{x} > 0$.

记 $g(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x (x > -1)$.

求导得 $g'(x) = \frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{x^2}{x+1}$.

当 $x > -1$ 时易知 $g'(x) \geq 0$, 所以函数 $g(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0) = 0$,

可得当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$.

即当 $x > 0$ 时, 不等式 $\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x > 0$ 成立.

即当 $x > 0$ 时, 不等式 $\frac{f(x)}{x^2} > -\frac{1}{2}x + 1$ 成立.

当 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) < g(0) = 0$,

即当 $-1 < x < 0$ 时, 不等式 $\ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x < 0$ 成立.

即当 $-1 < x < 0$ 时, 不等式 $\frac{f(x)}{x^2} > -\frac{1}{2}x + 1$ 成立.

综上所述, 不等式 $\frac{f(x)}{x^2} > -\frac{1}{2}x + 1$ 成立.

(20) (本小题 15 分)

解: (I) 将点 $P(-2,1)$, $Q(2\sqrt{2},0)$ 坐标代入椭圆 E 的方程, 得

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ \frac{8}{a^2} = 1. \end{cases} \quad \text{解得 } a^2 = 8, b^2 = 2.$$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(II) 若直线 l 斜率不存在, 即直线 l 为 $x=0$ 时, A 和 M 点重合, B 和 N 点重合, 分别为椭圆的上下顶点 $(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})$, 此时 $|GM| \cdot |GN| = (2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2}) = 2$, 符合题意.

若直线 l 斜率存在, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + 2$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq -2$ 且 $x_2 \neq -2$).

$$\text{联立方程 } \begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 得, } (4k^2 + 1)x^2 + 16kx + 8 = 0.$$

$$\Delta = (16k)^2 - 32(4k^2 + 1) = 32(4k^2 - 1) > 0, \therefore k^2 > \frac{1}{4}, \text{ 即 } k > \frac{1}{2} \text{ 或 } k < -\frac{1}{2}.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-16k}{4k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{8}{4k^2 + 1}.$$

$$k_{PA} = \frac{y_1 - 1}{x_1 + 2}, \text{ 所以直线 } PA \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1 - 1}{x_1 + 2}(x + 2) + 1, \text{ 取 } x = 0 \text{ 得 } M(0, \frac{2(y_1 - 1)}{x_1 + 2} + 1).$$

$$\text{同理可得 } N(0, \frac{2(y_2 - 1)}{x_2 + 2} + 1).$$

$$\text{由 } |GM| \cdot |GN| = 2 \text{ 得 } \left| \frac{2(y_1 - 1)}{x_1 + 2} + 1 - 2 \right| \cdot \left| \frac{2(y_2 - 1)}{x_2 + 2} + 1 - 2 \right| = 2,$$

$$\text{即 } \left| \frac{2(kx_1 + 1)}{x_1 + 2} - 1 \right| \cdot \left| \frac{2(kx_2 + 1)}{x_2 + 2} - 1 \right| = 2.$$

$$\text{所以 } (2k - 1)^2 \left| \frac{x_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{x_2}{x_2 + 2} \right| = 2,$$

$$\text{即 } (2k-1)^2 \left| \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} \right| = 2.$$

$$(2k-1)^2 \left| \frac{\frac{8}{4k^2+1}}{\frac{8}{4k^2+1} - \frac{32k}{4k^2+1} + 4} \right| = 2,$$

$$\text{即 } \frac{(2k-1)^2}{|4k^2-8k+3|} = 1,$$

因为 $k > \frac{1}{2}$,

$$\text{所以得 } \frac{|2k-1|}{|2k-3|} = 1,$$

即 $k=1$.

经检验符合题意, 此时直线 l 为 $y=x+2$.

综上所述, 直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=x+2$.

(21) (本小题 15 分)

解: (I) 1,2,1 和 3,1.

(II) $S(Q)$ 的最小值为 7.

首先证明 $S(Q) \geq 7$: 由题知 $C_n^2 \geq 6$ 得 $n \geq 4$.

① 当 $n=4$ 时, 应有数列中各项均不相同, 此时有 $S(Q) \geq 1+2+3+4=10$;

② 当 $n=5$ 时, 由于数列中各项必有不同的数, 进而有 $S(Q) \geq 6$. 若 $S(Q)=6$, 满足上述要求的数列中有四项为 1, 一项为 2, 此时 $T(Q) \leq 4$, 不符;

③ 当 $n \geq 6$ 时, 同②可得 $S(Q) \geq 7$.

综上所述, 有 $S(Q) \geq 7$. 同时当 Q 为 2,2,1,1,1 时, $S(Q)=7$, 所以 $S(Q)$ 的最小值为 7.

(III) $T(Q)$ 的最大值为 511566.

下面分五步证明当 $T(Q)$ 最大时, 数列 Q 应满足:

① 存在大于 1 的项, 否则此时有 $T(Q)=0$;

② $a_n=1$, 否则将 a_n 拆分成 a_n 个 1 后 $T(Q)$ 变大;

③ 当 $t=1, 2, \dots, n-1$ 时, 有 $a_t \geq a_{t+1}$, 否则交换 a_t, a_{t+1} 的顺序后 $T(Q)$ 变为 $T(Q)+1$.

进一步有 $a_t - a_{t+1} \in \{0, 1\}$, 否则有 $a_t \geq a_{t+1} + 2$, 此时将 a_t 改为 $a_t - 1$, 并在数列末尾添加一项 1, 此时 $T(Q)$ 变大;

④ 各项只能为 2 或 1, 否则由①②③可得数列 Q 中存在相邻的两项 $a_t=3, a_{t+1}=2$, 设此时 Q 中有 x 项为 2, 则将 a_t 改为 2, 并在数列末尾添加一项 1 后, $T(Q)$ 的值至少变为 $T(Q)+x+1-x=T(Q)+1$;

⑤ 由上可得数列 Q 为 2, 2, ..., 2, 1, 1, ..., 1 的形式, 设其中有 x 项为 2, 有 y 项为 1, 则有 $2x+y=2023$,

从而有 $T(Q) = xy = (2023 - 2x)x = -2x^2 + 2023x$ ，由二次函数性质可得，当且仅当 $\begin{cases} x = 506 \\ y = 1011 \end{cases}$ 时，

$T(Q)$ 最大，为 511566.


综上可得 $T(Q)$ 的最大值为 511566.


关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线