# “皖南八校”2022届高三第二次联考

# 数学(理科)

“皖八”理事会(18校)　审定:杨　来　谷慎玲　2021.12

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分,考试时间120分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数$z$满足$z(1-i)=i^4+i^5$(其中$i$为虚数单位),则复数$z$的虚部是

A. $-1$　　B. 1　　C. $-i$　　D. $i$

2. 已知$A=\{(x,y)\mid y=-2x,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{(x,y)\mid y=x^2-3,x\in\mathbf{R}\}$,则$A\cap B$等于

A. $\{(1,-2),(-3,6)\}$　　B. $\mathbf{R}$

C. $[-3,+\infty)$　　D. $\varnothing$

3. 命题“$\forall x_0\in(0,+\infty)$,$\ln x_0\leqslant x_0-1$”的否定是

A. $\exists x_0\in(0,+\infty)$,$\ln x_0>x_0-1$

B. $\exists x_0\notin(0,+\infty)$,$\ln x_0\leqslant x_0-1$

C. $\forall x\in(0,+\infty)$,$\ln x>x-1$

D. $\forall x\notin(0,+\infty)$,$\ln x\leqslant x-1$

4. 散点图上有5组数据:$(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)$,$(x_3,y_3)$,$(x_4,y_4)$,$(x_5,y_5)$,据收集到的数据可知$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=55$,由最小二乘法求得回归直线方程为$\hat{y}=0.76x+45.84$,则$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5$的值为

A. 54.2　　B. 87.64　　37　C. 271　　D. 438.2

5. 在《增减算法统宗》中有这样一则故事:“三百七十八里关,初行健步不为难;次日脚痛减一半,如此六日过其关”.则第五天走的路程为(　　)里.

A. 6　　B. 12　　C. 24　　D. 48

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2(x+2)-1,(x\geqslant 0)\\1-\log_2(2-x),(x<0)\end{cases}$,则函数$f(x)$是

A. 偶函数,在$\mathbf{R}$上单调递增　　B. 偶函数,在$\mathbf{R}$上单调递减

C. 奇函数,在$\mathbf{R}$上单调递增　　D. 奇函数,在$\mathbf{R}$上单调递减

7. 若 $a>b>1$，$0<c<1$，则

A. $a^c<b^c$　　B. $ab^c<ba^c$　　C. $\log_a c>\log_b c$　　D. $a\log_b c>b\log_a c$

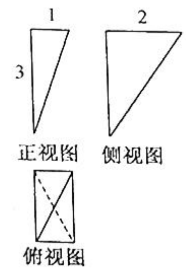
8. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的外接球表面积是

A. $14\pi$

B. $10\pi$

C. $\frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$

D. $\frac{14}{3}\pi$




9. 已知 $\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=2$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为

A. $-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$　　B. $-\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$　　C. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$　　D. $-\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

10. 在 $(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x)^n$ 的展开式中，只有第 5 项的二项式系数最大，则展开式中 $x^6$ 的系数为

A. $\frac{45}{4}$　　B. $-\frac{35}{8}$　　C. $\frac{35}{8}$　　D. 7

11. 已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 $F$，若直线 $l$ 过点 $F$，且与抛物线 $C$ 交于 $A$、$B$ 两点，过点 $A$ 作直线 $y=-1$ 的垂线，垂足为点 $M$，点 $N$ 在 $y$ 轴上，线段 $AF$，$MN$ 互相垂直平分，则 $|AB|=$

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{16}{3}$　　C. 4　　D. 8

12. 已知 $a=-\sin 0.01$，$b=\sin 0.1$，$c=\ln 0.99$，$d=\ln\frac{10}{9}$，则 $a,b,c,d$ 的大小关系为

A. $d>b>a>c$　　B. $b>d>a>c$

C. $d>b>c>a$　　D. $b>d>c>a$

**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，则 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$________.

14. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，其前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $S_6-3S_2=24$，则 $S_{10}=$________.

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，左右焦点分别为 $F_1,F_2$，若过右焦点的直线与以 $OF_1$ 为直径的圆相切，且与双曲线在第二象限交于点 $P$，且 $PF_1\perp x$ 轴，则双曲线的离心率是________.

16. 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60°$，$AA_1=2\sqrt{3}$，点 $P$ 在线段 $BD_1$ 上运动，且 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$，则以下命题中正确的是：________.

①当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，三棱锥 $A-CPD_1$ 的体积为 $\frac{2}{3}$；

②随点 $P$ 在线段 $BD_1$ 上运动，点 $B$ 到平面 $ACP$ 的最大距离为 2；

③当二面角 $B-AC-P$ 的平面角为 $60°$ 时，$\lambda=\frac{1}{3}$；

④知 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BB_1}$，$N$ 为 $CC_1$ 的中点，当平面 $AMN$ 与 $BD_1$ 的交点为 $P$ 时，$\angle APC=120°$.

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分．

17．（本小题满分12分）

在△ABC中，角A，B，C的对边分别为$a$，$b$，$c$，$2\sin C=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{c^2}{ab}$．

（1）求角C；

（2）若$c=1$，$A=\frac{\pi}{3}$，求△ABC的面积．

(1) $2ab\sin C=a^2+b^2-c^2$.

$2ab\sin C=2ab\cos C$

18．（本小题满分12分）

2021年7月25日，在东京奥运会自行车公路赛中，奥地利数学女博士安娜·基森霍夫（Anna Kiesenhofer）以3小时52分45秒的成绩获得冠军，震惊了世界！广大网友惊呼“学好数理化，走遍天下都不怕”．某市对中学生的体能测试成绩与数学测试成绩进行分析，并从中随机抽取了200人进行抽样分析，得到下表（单位：人）：

| | 体能一般 | 体能优秀 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 数学一般 | 50 a | 50 b | 100 |
| 数学优秀 | 40 c | 60 d | 100 |
| 合计 | 90 | 110 | 200 |

（1）根据以上数据，能否在犯错误的概率不超过0.10的前提下认为“体能优秀”还是“体能一般”与数学成绩有关？（结果精确到小数点后两位）

120 40 60

（2）①现从抽取的数学优秀的人中，按“体能优秀”与“体能一般”这两类进行分层抽样抽取10人，然后，再从这10人中随机选出4人，求其中至少有2人是“体能优秀”的概率；

②将频率视为概率，以样本估计总体，从该市中学生中随机抽取10人参加座谈会，记其中“体能优秀”的人数为$X$，求$X$的数学期望和方差．

10 4 6

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$．

参考数据：

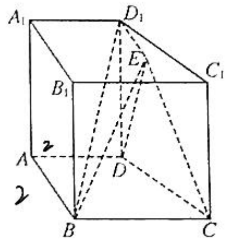
| $P(K^2\geqslant k_0)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 |

19.(本小题满分 12 分)

在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB\perp AD$,$AD/\!/BC$,且 $AB=AD=2$,$BC=4$,$AA_1=2\sqrt{2}$,$\overrightarrow{BD_1}=2\overrightarrow{DE}$.

(1)求证:$CD\perp BE$;

(2)求直线 $D_1E$ 与平面 $BCE$ 所成角的正弦值.




20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,且经过点 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,过 $M(-\frac{2}{3},0)$作直线 $l$ 与椭圆交于点 $P$,$Q$(点 $P$,$Q$ 异于点 $A$,$B$),连接直线 $AQ$,$PB$ 交于点 $N$.

(1)求椭圆的方程;

(2)当点 $P$ 位于第二象限时,求 $\tan\angle PNQ$ 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-x^2-x$.

(1)求 $f(x)$的极值;

(2)设 $g(x)=f(x)+\frac{(a+2)x^2}{2}-(a-1)x+\frac{3}{2}(a>0)$,若 $g(x)$存在唯一极大值,极大值点为 $x_0$,且 $g(x_0)\in\left(\frac{3e^2-2}{2-2e^2},\frac{e}{2-2e}\right)$,求 $a$ 的取值范围.

**(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.**

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 $xOy$ 中,直线 $l$ 的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\\y=2-t\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点为极点,$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho=6\sin\theta+8\cos\theta$.

(1)求曲线 $C$ 的直角坐标方程与直线 $l$ 的普通方程;

(2)直线 $l$ 与曲线 $C$ 交于 $A$,$B$ 两点,点 $P(-2,6)$,求$|PA|+|PB|$.

23.[选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=-|x+1|-|x+2|$.

(1)求不等式 $f(x)\geq-3$ 的解集;

(2)若对 $\forall x\in[-4,2]$,都有 $f(x)+|a-2|\geq0$ 恒成立,求 $a$ 的取值范围.

# “皖南八校”2022届高三第二次联考·数学(理科)
## 参考答案、提示及评分细则

1.B　因为 $i^4=1,i^2=-i$,所以 $z=\frac{1+i}{1-i}=i$.所以复数 $z$ 的虚部是 1 .故选 B.

2.A　由方程组 $\begin{cases}y=-2x\\y=x^2-3\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$,$\begin{cases}x=-3\\y=6\end{cases}$根据集合交集的概念及运算,可得 $A\cap B=\{(1,-2),(-3,6)\}$.故选 A.

3.A　命题“$\forall x_0\in(0,+\infty),\ln x_0\leqslant x_0-1$”的否定为“$\exists x\in(0,+\infty),\ln x_0>x_0-1$”.故选 A.

4.C　$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=55$,故 $\bar{x}=11$,则 $\bar{y}=0.76\bar{x}+45.84=54.2$,故 $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=5\bar{y}=271$.故选 C.

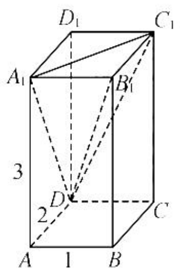
5.B　设此人第 $n$ 天走 $a_n$ 里路,则$\{a_n\}$是首项为 $a_1$,公比为 $q=\frac{1}{2}$的等比数列,由等比数列前 $n$ 项和公式得:

$$S_6=\frac{a_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}=378$$,解得 $a_1=192$,$\therefore a_5=a_1q^4=192\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=12$.,故选:B.

6.C　易知 $f(0)=0$,当 $x>0$ 时,$f(x)=\log_2(x+2)-1$,$-f(x)=1-\log_2(x+2)$,
此时,$-x<0$,则 $f(-x)=1-\log_2(x+2)$,满足 $f(-x)=-f(x)$,
当 $x<0$ 时,$f(x)=1-\log_2(2-x)$,$-f(x)=-1+\log_2(-x+2)$,
此时,$-x>0$,则 $f(-x)=-1+\log_2(-x+2)$,满足 $f(-x)=-f(x)$,
所以,函数 $f(x)$是奇函数,且单调递增,故选 C.

7.C　因为 $a>b>1,0<c<1$,令 $y=x^c$,则该函数在$(0,+\infty)$为增函数,$\therefore a^c>b^c$,故 A 错误;令 $y=x^{c-1}$,则该函数在$(0,+\infty)$为减函数,则$\frac{b^c}{b}>\frac{a^c}{a}$,则有 $ab^c>ba^c$,故 B 错误;令 $y=\log_c x$,则该函数为减函数,所以 $0>\log_c b>\log_c a$,则 $\log_b c<\log_a c<0$,故 C 正确;由 C 可知,$\log_b c<\log_a c<0$,又 $a>b>1$,所以 $a\log_b c<a\log_a c<b\log_a c$,故 D 错误;故选 C.

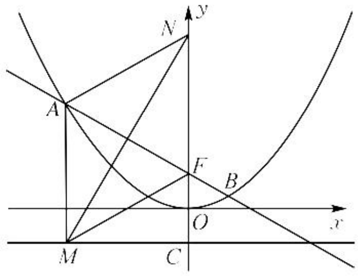
8.A　解:此几何体为长宽高分别为 1,2,3 的长方体中的四个顶点构成的三棱锥,所以 $R=\frac{\sqrt{1+2^2+3^2}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$,外接球表面积为:$S=4\pi R^2=14\pi$.




9.A　$\because\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=2$,$\therefore\tan\alpha=-3$,$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha=\frac{2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{3}\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{2(1+\tan^2\alpha)}=-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

10.C　因为在$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)^n$的展开式中,只有第 5 项的二项式系数最大,所以$\frac{n}{2}+1=5$,$n=8$,所以$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)^8$的展开式的通项 $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\left(-\frac{1}{2}x\right)^r=C_8^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{\frac{8+r}{2}}$,$r=0,1,2\cdots,8$.
令$\frac{8+r}{2}=6$,得 $r=4$,所以展开式中 $x^6$ 的系数为 $C_8^4\left(-\frac{1}{2}\right)^4=70\times\frac{1}{16}=\frac{35}{8}$.故选:C.

11. B　如图所示，因为 $AF$，$MN$ 互相垂直平分，所以四边形 $AMFN$ 为菱形. 又由抛物线定义可知，$AF=AM$，故 $\triangle AMF$ 为正三角形，从而 $\angle FMC=30°$，所以在 $Rt\triangle FMC$ 中，$\sin\angle FMC=\dfrac{FC}{MF}=\dfrac{1}{2}$，又 $FC=2$，所以 $MF=AF=4$.




又 $\dfrac{1}{AF}+\dfrac{1}{BF}=\dfrac{2}{p}=1$，得 $BF=\dfrac{4}{3}$，所以 $AB=AF+BF=4+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$.

12. A　$f(x)=\sin(x-1)-\ln x$，$x\in(0,1)$.

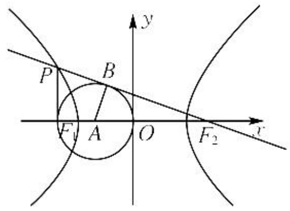
则 $f'(x)=\cos(x-1)-\dfrac{1}{x}$，$\because x\in(0,1)$，$\therefore \cos(x-1)\in(0,1)$，$\dfrac{1}{x}>1$，故 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$f(x)>f(1)=0$，即当 $x\in(0,1)$ 时，$\sin(x-1)-\ln x>0$，则 $-\ln x>-\sin(x-1)$，即 $\ln\dfrac{1}{x}>\sin(1-x)$，易得 $a<0$，$c<0$，$b>0$，$d>0$，则 $0>\sin(0.99-1)>\ln 0.99$，$\ln\dfrac{10}{9}>\sin 0.1>0$，故 $d>b>a>c$.

13. $-\dfrac{3}{4}$　$\because |\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4}=\sqrt{2}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{3}{2}$，因此，$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{3}{4}$.

14. 100　$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，设其公差为 $d$，又 $\dfrac{S_6}{6}-\dfrac{S_2}{2}=4d=4$，解得：$d=1$.

又 $\dfrac{S_1}{1}=a_1=1$，$\therefore \dfrac{S_{10}}{10}=10$，$\therefore S_{10}=100$.

15. $\sqrt{2}$　如图所示：不妨假设 $c=2$，设切点为 $B$.

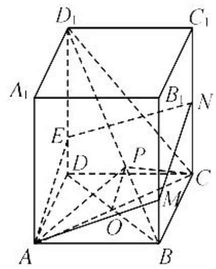



$\sin\angle PF_2F_1=\sin\angle BF_2A=\dfrac{|AB|}{|F_2A|}=\dfrac{1}{3}$，$\tan\angle PF_2F_1=\dfrac{1}{\sqrt{3^2-1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

所以由 $\tan\angle PF_2F_1=\dfrac{|PF_1|}{|F_1F_2|}$，$|F_1F_2|=2c=4$，所以 $|PF_1|=\sqrt{2}$，$|PF_2|=|PF_1|\times\dfrac{1}{\sin\angle PF_2F_1}=3\sqrt{2}$.

于是 $2a=|PF_2|-|PF_1|=2\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

16. ①④　①当 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 时，$S_{\triangle D_1CP}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD_1}$，$\therefore V_{A-PCD_1}=\dfrac{1}{3}V_{A-BCD_1}=\dfrac{1}{3}V_{D_1-ABC}=\dfrac{2}{3}$，所以①正确.




②当点 $P$ 为线段 $BD_1$ 的中点时，平面 $APC\perp$ 底面 $ABCD$，此时，点 $B$ 到平面 $ACP$ 的最大距离为 1，所以②错.

③由 $\triangle APC$ 为等腰三角形，线段 $AC$ 的中点为 $O$，则 $OP\perp AC$，在底面上有 $BO\perp AC$，所以二面角 $B-AC-P$ 的平面角为 $\angle BOP=60°$.

又 $\tan\angle DBD_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，则 $\angle DBD_1=60°$，所以 $\triangle BOP$ 为正三角形，所以 $BP=BO=1=\dfrac{1}{4}BD_1$，

则 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，所以③错.

④知 $BM=\dfrac{1}{4}BB_1$，$N$ 为 $CC_1$ 的中点，当平面 $AMN$ 与 $DD_1$ 的交点为 $E$，此时 $EM$ 与 $BD_1$ 的交点为 $BD_1$ 的

四等分点，由③知，此时 $OP=BO=1$，在直角三角形 $AOP$ 中，$\angle APO=60°$，由于$\triangle APC$ 为等腰三角形，有 $\angle APC=120°$，所以④对.

17. 解：(1) $2\sin C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}$，…………………… 2 分

则 $\sin C=\dfrac{2ab\cos C}{2ab}$，$\therefore \tan C=1$，…………………… 4 分

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{4}$ …………………… 5 分

(2) 由(1)得 $C=\dfrac{\pi}{4}$，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得，

$b=\dfrac{c}{\sin C}\cdot\sin B=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}\right)$. …………………… 7 分

$=\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{3\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，…………………… 10 分

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$ …………………… 12 分

18. 解：(1) $K^2=\dfrac{200\times(50\times60-50\times40)^2}{110\times90\times100\times100}\approx2.02$. …………………… 2 分

$\because 2.02<2.706$，

不能在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为“体能优秀”还是“体能一般”与数学成绩有关. ……… 4 分

(2) ①依题意，抽取的数学优秀的人中，是“体能一般”的有 $10\times\dfrac{40}{100}=4$(人)，

是“体能优秀”的有 $10\times\dfrac{60}{100}=6$(人). …………………… 6 分

则选出的 4 人中至少有 2 人是“体能优秀”的概率为

$P=1-\dfrac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}-\dfrac{C_6^0C_4^4}{C_{10}^4}=1-\dfrac{24}{210}-\dfrac{1}{210}=\dfrac{185}{210}=\dfrac{37}{42}$. …………………… 8 分

②由列联表知，“体能优秀”的频率为 $\dfrac{110}{200}=\dfrac{11}{20}$，

将频率视为概率，以样本估计总体，即从人群中任意抽取 1 人，

恰好抽到“体能优秀”的概率为 $\dfrac{11}{20}$.

由题意得“体能优秀”人数 $X$ 服从二项分布，且 $X\sim B\left(10,\dfrac{11}{20}\right)$，…………………… 10 分

$\therefore E(X)=10\times\dfrac{11}{20}=\dfrac{11}{2}$，$D(X)=10\times\dfrac{9}{20}\times\dfrac{11}{20}=\dfrac{99}{40}$. …………………… 12 分

19. (1) 证明：在直角梯形 $ABCD$，$\because AB=AD=2$，$\angle BAD=90°$，

$\therefore \angle BDA=45°$，

又 $\because AD//BC$，$\therefore BD=2\sqrt{2}$，$\angle DBC=45°$，$DC^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos45°$.

得到 $DC=2\sqrt{2}$，$\therefore CD\perp BD$. …………………… 2 分

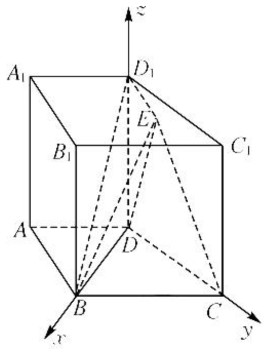
又 $\because DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore DD_1\perp CD$，又 $DD_1\cap BD=D$，

$\therefore CD\perp$ 平面 $BDD_1$，…………………… 4 分

$\because \overrightarrow{BD_1}=2\overrightarrow{DE}$，$\therefore B,D,E,D_1$四点共面，

$\therefore BE\subseteq$平面$BDD_1$，所以$CD\perp BE$. ………………………………………………………… 5分

(2)解：以$D$为坐标原点，$DB$，$DC$，$DD_1$所在的直线为$x$，$y$，$z$轴建立直角坐标系，



$D(0,0,0)$，$B(2\sqrt{2},0,0)$，$C(0,2\sqrt{2},0)$，$D_1(0,0,2\sqrt{2})$

由$\overrightarrow{BD_1}=2\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{BD_1}=(\ \ 2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$，

$\therefore \overrightarrow{DE}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$E(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=(-3\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{EC}=(\sqrt{2},2\sqrt{2},-\sqrt{2})$，……… 7分

设平面$BCE$的法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}-3\sqrt{2}x+\sqrt{2}z=0\\-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=z\\y=x\end{cases}，令x=1则\boldsymbol{m}=(1,1,3)$$

$\overrightarrow{D_1E}=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$. ………………………………………………………………………… 9分

直线$D_1E$与平面$BCE$所成角$\theta$的正弦值：

$$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1E}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{D_1E}|}=\frac{|-\sqrt{2}-3\sqrt{2}|}{2\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$$

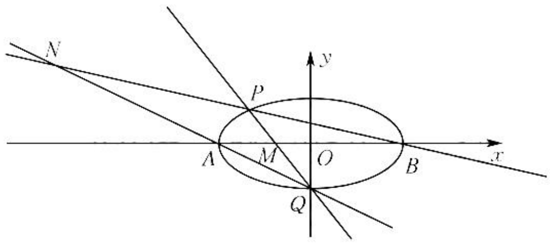
直线$D_1E$与平面$BCE$所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{22}}{11}$. ……………………………………………… 12分

20. 解：(1)由题意$a=2$，又由$a^2=c^2+b^2$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所以，$c=\sqrt{3}$，$b=1$

故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………………… 4分

(2)设直线$PB$倾斜角为$\alpha$，斜率为$k_1$，直线$AQ$倾斜角为$\beta$，斜率为$k_2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，



$PQ$直线方程为：$x=my-\dfrac{2}{3}$

$$\begin{cases}x=my-\dfrac{2}{3}\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow(m^2+4)y^2-\frac{4}{3}my-\frac{32}{9}=0$$

$$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{4m}{3(m^2+4)}\\y_1y_2=-\dfrac{32}{9(m^2+4)}\end{cases}\Rightarrow my_1y_2=-\frac{8}{3}(y_1+y_2)$$ ………………………………………… 6分

所以$$\frac{k_{AQ}}{k_{BP}}=\frac{k_2}{k_1}=\frac{\dfrac{y_2}{x_2+2}}{\dfrac{y_1}{x_1-2}}=\frac{y_2(x_1-2)}{y_1(x_2+2)}=\frac{y_2(my_1-\dfrac{2}{3}-2)}{y_1(my_2-\dfrac{2}{3}+2)}=\frac{my_1y_2-\dfrac{8}{3}y_2}{my_1y_2+\dfrac{4}{3}y_1}=\frac{-\dfrac{16}{3}y_2-\dfrac{8}{3}y_1}{-\dfrac{8}{3}y_2-\dfrac{4}{3}y_1}=2.$$

即$k_2=2k_1$. …………………………………………………………………………………………… 8分

$$\tan\angle PNQ=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{k_1-2k_1}{1+2k_1^2}=\frac{-k_1}{1-2k_1^2}=\frac{-1}{\dfrac{1}{k_1}+2k_1}$$ ………………… 10分

由图可知，当点 $P$ 位于第二象限时，设直线 $PB$ 的斜率 $k_1\in(-\frac{1}{2},0)$

所以 $\frac{1}{k_1}+2k_1\in(-\infty,-3)$，故 $\tan\angle PNQ=\frac{-1}{\frac{1}{k_1}+2k_1}\in(0,\frac{1}{3})$ …………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题意知 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-2x-1=\frac{-2x^2-x+1}{x}=\frac{(x+1)(1-2x)}{x}$，…………………………………… 1 分

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f'(x)>0$，即 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；

$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，$f'(x)<0$，即 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，…………………………………… 3 分

故 $f(x)$ 极大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{3}{4}$，无极小值. …………………………………… 4 分

(2)由题意 $g(x)=\ln x+\frac{ax^2}{2}-ax+\frac{3}{2}$，$g'(x)=\frac{1}{x}+a(x-1)=\frac{ax^2-ax+1}{x}$，…………………… 5 分

令 $\varphi(x)=ax^2-ax+1$，

当 $\Delta=a^2-4a\leqslant 0$，即 $a\in(0,4]$ 时，$\because a>0$，$\therefore\varphi(x)\geqslant 0$ 恒成立，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，不存在极大值；…………………………………… 6 分

当 $\Delta=a^2-8a>0$，即 $a\in(4,+\infty)$ 时，$\because a>0$，$\varphi(x)$ 对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，

$\varphi(0)=\varphi(1)=1>0$，$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4-a}{4}<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上分别有一个零点为 $x_1,x_2$，

当 $x\in(0,x_1)$，$\varphi(x)>0$，即 $g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_1,x_2)$，$\varphi(x)<0$，即 $g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_2,1)$，$\varphi(x)>0$，即 $g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增，故 $g(x)$ 极大值点为 $x_1$，

即 $x_0=x_1$，$\therefore a=\frac{1}{x_0-x_0^2}$，$x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，…………………………………… 8 分

则 $g(x_0)=\ln x_0+\frac{ax_0{}^2}{2}-ax_0+\frac{3}{2}=\ln x_0+\frac{1}{x_0-x_0^2}\cdot\frac{x_0^2-2x_0}{2}+\frac{3}{2}=\ln x_0+\frac{x_0-2}{2(1-x_0)}+\frac{3}{2}=\ln x_0+\frac{1}{2(x_0-1)}+1$，

令 $F(x)=\ln x+\frac{1}{2(x-1)}+1\left(x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$，

$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x-1)^2}=\frac{(2x-1)(x-2)}{2x(x-1)^2}>0$，则 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 单调递增，…………………… 10 分

$x\in\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)$，$F(x)\in\left(\frac{3e^2-2}{2-2e^2},\frac{e}{2-2e}\right)$，故 $x_0\in\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)$，

$\therefore a=\frac{1}{x_0-x_0^2}\in\left(\frac{e^2}{e-1},\frac{e^4}{e^2-1}\right)$. …………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $\rho=6\sin\theta+8\cos\theta$ 得 $\rho^2=6\rho\sin\theta+8\rho\cos\theta$，把 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$

代入得：$x^2+y^2=6y+8x$，所以曲线 $C$ 的直角坐标方程为：$(x-4)^2+(y-3)^2=25$，…………………… 2 分

由 $\begin{cases}x=2+t\\y=2-t\end{cases}$ 消去参数 $t$ 得：$x+y-4=0$，所以直线 $l$ 的普通方程为 $x+y-4=0$；…………………… 4 分

(2)显然点 $P(-2,6)$ 在直线 $l$ 上，则直线 $l$ 参数方程的标准形式为：$\begin{cases} x=-2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t' \\ y=6+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t' \end{cases}$（$t'$ 为参数），

将直线 $l$ 参数方程的标准形式代入曲线 $C$ 的直角坐标方程得：$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t'+6\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t'+3\right)^2=25$，……… 6 分

整理得：$t'^2+9\sqrt{2}t'+20=0$，因 $\Delta=(9\sqrt{2})^2-4\cdot 20=82>0$，

设点 $A$，$B$ 所对参数分别为 $t'_1$，$t'_2$，则有 $t'_1+t'_2=-9\sqrt{2}$，$t'_1t'_2=20$，显然，$t'_1<0$，$t'_2<0$， …………… 8 分

因此，$|PA|+|PB|=|t'_1|+|t'_2|=|t'_1+t'_2|=9\sqrt{2}$. …………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=-|x+1|-|x+2|=\begin{cases} 2x+3, x\leqslant -2 \\ -1, -2<x<-1 \\ -2x-3, x\geqslant -1 \end{cases}$，…………………………………………… 1 分

由 $f(x)\geqslant -3$，得 $\begin{cases} 2x+3\geqslant -3 \\ x\leqslant -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\geqslant -3 \\ -2<x<-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2x-3\geqslant -3 \\ x\geqslant -1 \end{cases}$

解得：$-3\leqslant x\leqslant -2$，$-2<x<-1$，$-1\leqslant x\leqslant 0$. ……………………………………………… 3 分

∴不等式 $f(x)\geqslant -3$ 的解集为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant 0\}$； ………………………………………… 4 分

(2)对 $\forall x\in[-4,2]$，都有 $f(x)+|a-2|\geqslant 0$ 恒成立，

有 $f(x)_{\min}\geqslant -|a-2|$，$f(x)_{\min}=\{f(-4),f(2)\}$. ……………………………………………… 6 分

得 $f(x)_{\min}=f(2)=-7$，则 $-7\geqslant -|a-2|$，

即 $7\leqslant|a-2|\Rightarrow a-2\geqslant 7$ 或 $a-2\leqslant -7$， ………………………………………………………… 8 分

$a\geqslant 9$ 或 $a\leqslant -5$，

$a$ 的取值范围 $\{a|a\geqslant 9$ 或 $a\leqslant -5\}$. ……………………………………………………………… 10 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。