

文科数学试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | y = x^2, x \in A\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为
A. 2 B. 3
C. 4 D. 5
2. 已知复数 $z = \frac{i}{1+i}$, 则它的共轭复数 $\bar{z} =$
A. $\frac{1-i}{2}$ B. $\frac{1+i}{2}$
C. $1-i$ D. $1+i$
3. 设一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均值为 2, 则数据 $2x_1+9, 2x_2+9, \dots, 2x_n+9$ 的平均值为
A. 11 B. 12
C. 13 D. 14
4. 某工厂产生的废气必须经过过滤后排放, 规定排放时污染物的残留含量不得超过原污染物总量的 0.5%. 已知在过滤过程中的污染物的残留数量 P (单位: 毫克/升) 与过滤时间 t (单位: 小时) 之间的函数关系为 $P = P_0 \cdot e^{-kt}$ (P_0 为原污染物总量). 要能够按规定排放废气, 则需要过滤 n 小时, 则正整数 n 的最小值为 (参考数据: 取 $\ln 5 = 1.609$, $\ln 2 = 0.693$)
A. 13 B. 14
C. 15 D. 16
5. 若 $\cos \alpha - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 0)$, $\vec{c} = (-1, m)$, 若 $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线, 则实数 $m =$
- A. 0
B. 1
C. -1
D. 2
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$, 其两条渐近线均与圆 $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2$ 相切, 则双曲线 C 的离心率为
- A. $\sqrt{2}$
B. $\sqrt{3}$
C. 2
D. $\sqrt{5}$
8. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = 60^\circ$, $AC = 4$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则 $AB =$
- A. $\sqrt{3}$
B. 2
C. $2\sqrt{3}$
D. 4
9. 某几何体的三视图如图 1 所示, 则该几何体的表面积是
- A. $2\sqrt{3} + 3$
B. $4\sqrt{2} + 3$
C. $4\sqrt{3} + 3$
D. $2\sqrt{5} + 3$
10. 设 $a = 2^{\frac{1}{e}}$, $b = \log_2 6$, $c = \log_2 \frac{1}{7}$, 则 a, b, c 的大小关系是
- A. $a < c < b$
B. $b < a < c$
C. $c < a < b$
D. $a < b < c$
11. 圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 被直线 $y = kx - 1$ 截得的最短弦长为
- A. $2\sqrt{3}$
B. $2\sqrt{2}$
C. $\sqrt{3}$
D. $\sqrt{2}$
12. 如图 2, 太极图是由黑白两个鱼形纹组成的图案, 俗称阴阳鱼, 太极图展现了一种相互转化, 相对统一的和谐美. 定义: 能够将圆 O 的周长和面积同时等分成两个部分的函数称为圆 O 的一个“太极函数”, 则
- A. 函数 $f(x) = \sqrt{x} + 1$ 是圆 $O: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的一个太极函数
B. 函数 $f(x) = x^3$ 不是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的太极函数
C. 函数 $f(x) = 2x$ 不是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的太极函数
D. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - x (x \geq 0) \\ -x^3 - x (x < 0) \end{cases}$ 不是圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的太极函数

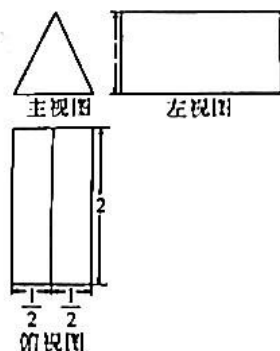


图 1

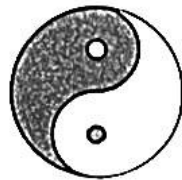


图 2

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知实数 x, y 满足不等式 $\begin{cases} x-y+2 \geq 0, \\ 2x+y-5 \leq 0, \\ y \geq 1. \end{cases}$ 则 $z=x^2+y^2$ 的最大值为_____.

14. 抛物线 $x=\frac{1}{4m}y^2 (m>0)$ 上一点 $A(2, y)$ 到焦点的距离为3, 则 $m=$ _____.

15. 已知 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f(x)=\frac{x-3}{e^x}+2f'(1) \cdot x$, 则 $f'(1)=$ _____.

16. 若圆锥的内切球与外接球的球心重合, 且圆锥内切球的半径为1, 则圆锥的表面积为_____.

三、解答题（共70分，解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分12分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=3$, $a_3-a_1=2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $q \neq 0$, $b_n=q^n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若对于 $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n+S_{n+1}=2S_{n+2}$, 求 q 的值.

18. （本小题满分12分）

线上直播带货弥补了人们因疫情足不出户的消费需求. 某直播平台抽取了该平台秀场类200个直播间, 进行了一次直播销量抽样调查, 其中播出时间固定的有120个, 播出时间不固定的有80个. 这200场直播单位时间（分钟）销量的频率分布直方图如图3所示. 假设该平台规定单位时间（分钟）销量在1000份及以上的为“高销量直播间”. 据统计, 在这200场直播中, 播出时间固定且为“高销量直播间”的频率为0.35.

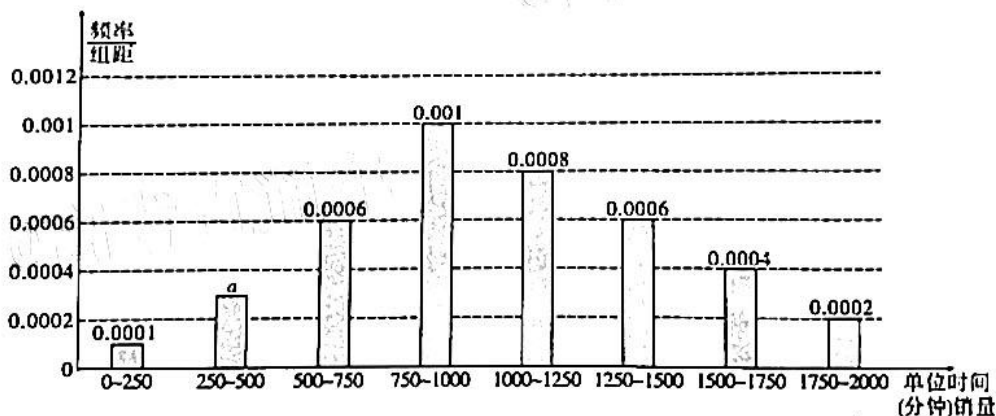


图3

（1）求 a 的值；

（2）从调查的200场直播间中, 按播出时间是否固定用分层抽样的方法选出5个, 再从这5个中选出3个进一步调查, 求恰好有一个播出时间固定的概率；

（3）补全 2×2 列联表, 并根据表中数据判断是否有99.5%的把握认为单位时间（分钟）销量与播出时间是否固定有关系.

	播出时间固定	播出时间不固定	总计
高销量直播间			
非高销量直播间			
总计	120	80	200

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(d+b)(c+d)}.$$

$P(K^2 \geq k_{\alpha})$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
k_{α}	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分12分)

如图4, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, D, E, F 分别为 AA_1, B_1C, BC 的中点.

(1) 证明: DE 与 A_1F 在同一平面内;

(2) 若 $AB=AC$, 求证: $DE \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

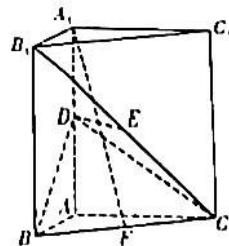


图4

20. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2$ ($a \in \mathbb{R}$) 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{6}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - 2x + b$ ($b \in \mathbb{R}$) 有1个零点, 求 b 的取值范围.

21. (本小题满分12分)

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点分别是 F_1, F_2 , 其长轴长是短轴长的2倍, P 为椭圆上任意一点, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积最大值为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 M 交于 A, B 两点, 且以线段 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点 C , 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

请考生在第22、23两题中任选一题作答, 并用2B铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致, 在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分10分) 【选修4-4: 坐标系与参数方程】

在新中国成立70周年国庆阅兵庆典中, 众多群众在脸上贴着一颗红心, 以此表达对祖国的热爱之情. 在数学中, 有多种方程都可以表示心型曲线, 其中有著名的笛卡尔心型曲线. 如图5, 在直角坐标系中, 以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 图中的曲线就是笛卡尔心型曲线, 其极坐标方程为 $\rho = 1 - \sin\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi, \rho > 0$), M 为该曲线上的任意一点.

(1) 当 $|OM| = \frac{1}{2}$ 时, 求 M 点的极坐标; 当 M 的极角为 $\frac{7\pi}{6}$ 时, 求它的极径;

(2) 若过极点的直线 AB 与该曲线相交于两点 A, B , 求证: 弦长 $|AB|$ 为定值, 并求出这个定值.

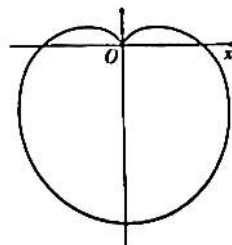


图5

23. (本小题满分10分) 【选修4-5: 不等式选讲】

已知 $m > 0, n > 0$, 且 $m+n=1$.

(1) 若 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} \geq |2x-1| - |x-1|$ 恒成立, 求 x 的取值范围;

(2) 证明: $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)(m^3 + n^3) \geq 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》