2022—2023学年度下学期高三第三次模拟考试试题

数学参考答案

一、1.C　2.A　3.C　4.A　5.B　6.C　7.A　8.D

二、9.ABC　10.BC　11.BD　12.ABD

三、13.39　14. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　15. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$　16. $t \geqslant \frac{1}{e^2-1}$

四、17.解:(1)

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

且$\triangle ABC$的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$,

由 $2S=a^2-(b-c)^2$,得 $bc\sin A=2bc-2bc\cos A$,化简得 $\sin A+2\cos A=2$,……2分

又 $A\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,联立得 $5\cos^2 A-8\sin A+3=0$,

解得 $\cos A=\frac{3}{5}$ 或 $\cos A=1$(舍去)……5分

(2)由(1)得 $\sin A=\frac{4}{5}$,

$\because S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{2}{5}bc=4$,$\therefore bc=10$,……7分

由余弦定理得:$\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2=b^2+c^2-2bc\cdot\frac{3}{5}$,$\therefore (b+c)^2-\frac{16}{5}bc=\frac{41}{4}$,

$\therefore (b+c)^2-32=\frac{41}{4}$,$\therefore b+c=\frac{13}{2}$,

$\therefore \triangle ABC$的周长为 $\frac{13+\sqrt{41}}{2}$ ……10分

18.解:(1)当 $n=1$ 时 $S_1=2a_1-2$,解得 $a_1=2$,

当 $n\geqslant 2$ 时 $S_{n-1}=2a_{n-1}-2$,所以 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2-(2a_{n-1}-2)$,即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$,

所以 $a_n=2a_{n-1}$,因为 $a_1=2\neq 0$,所以$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,

所以 $a_n=2^n$;……3分

设数列$\{b_n\}$的公差为 d ,由 $b_3=5$, $b_5=9$,可得 $\begin{cases}b_1+2d=5\\b_1+4d=9\end{cases}$,解得 $\begin{cases}d=2\\b_1=1\end{cases}$,

所以 $b_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.……6分

(2)因为 $c_n=b_{a_n}=2\cdot 2^n-1$,……8分

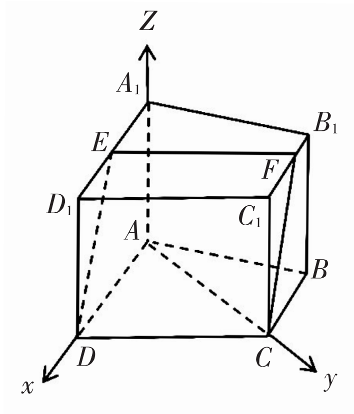
$d_n=\frac{c_n+1}{c_nc_{n+1}}=\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-1)(2^{n+2}-1)}=\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2^{n+2}-1}$ ……10分

$T_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

$= \left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1}\right) + \left(\frac{1}{2^3-1} - \frac{1}{2^4-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n+1}-1} - \frac{1}{2^{n+2}-1}\right)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+2}-1}$ ……12分

19.解：(1) $\because$ 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 所截，截面为 $CDEF$，



$\therefore EF /\!/ CD, C_1D_1 /\!/ CD, C_1D_1 = CD$

$\because EF = CD$

$\therefore C_1D_1 /\!/ EF, C_1D_1 = EF$

$\therefore EFC_1D_1$ 是平行四边形

$\therefore A_1D_1 /\!/ B_1C_1$

$\therefore AD /\!/ BC$……4分

(2) $\triangle ADC$ 中，由余弦定理可得 $AC = \sqrt{3}$，由勾股定理得 $AC \perp AD$，又 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$，

故而 AA_1, AC, AD 两两垂直，如图建系．设 $AA_1 = h$，则 $A(0,0,0)$，$D(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,h)$，$E(\frac{1}{2},0,h)$，$\overrightarrow{DC} = (-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DE} = (-\frac{1}{2},0,h)$，……6分

面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n} = (0,0,1)$，

设面 $EFCD$ 的法向量为 $\vec{k} = (x,y,z)$，

由 $\begin{cases} \vec{k} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{k} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + hz = 0 \end{cases}$

令 $x = \sqrt{3}$，$\vec{k} = \left(\sqrt{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2h}\right)$，依题：$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|} \Rightarrow h = 1$.……8分

设面 AA_1F 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$，$\overrightarrow{AA_1} = (0,0,1)$，

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ 得 $F(-\frac{1}{2},\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{AF} = (-\frac{1}{2},\sqrt{3},1)$

由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}y + z = 0 \end{cases}$

令 $y = 1$，$\vec{m} = (2\sqrt{3},1,0)$ ……10分

直线 DE 与平面 AA_1F 所成角为 θ

$$\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{DE}, \vec{m} \rangle| = \left| \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}} \right| = \frac{2\sqrt{195}}{65}$$

直线 DE 与平面 AA_1F 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{195}}{65}$ ……12分

20.解：(1)补全的2×2列联表如下，

	经常使用	偶尔或不用	总计
男性	70	30	100
女性	90	10	100
总计	160	40	200

由列联表可得

$K^2=\dfrac{200\times(70\times10-30\times90)^2}{100\times100\times160\times40}=\dfrac{25}{2}=12.5>7.879$，

所以能在犯错误的概率不超过0.005的前提下认为经常使用该款App与性别有关.……4分

(2)由2×2列联表可知，抽取到经常使用该款App的市民的频率为$\dfrac{160}{200}=0.8$

将频率视为概率，所以从该市市民中任意抽取1人，恰好抽取到经常使用该款App的市民的概率为0.8，由题意知$X\sim B(10,0.8)$，

所以$E(X)=10\times0.8=8$，$D(X)=10\times0.8\times0.2=1.6$.……8分

(3)由题意，因为$E(\eta)=100\times0.8=80>5$，

$D(\eta)=100\times0.8\times0.2=16>5$，所以近似为$\eta\sim N(80,16)$，所以$P(68\leqslant\eta\leqslant92)=P(80-3\times4\leqslant\eta\leqslant80+3\times4)\approx0.9974$.……12分

21.解：(1)设点P的坐标为(x,y)，因为$k_{PM}\cdot k_{PN}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{y-1}{x-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y+1}{x+\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$，整理得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

所以圆锥曲线E的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$……4分

(2)①易知$m\neq0$，且直线l与y轴的交点为$T(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{m})$，

设直线l交椭圆于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{2}\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，得$(m^2+2)y^2+2\sqrt{2}my-2=0$，

所以$\Delta=8m^2+8(m^2+2)=16(m^2+1)>0$，

所以$y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{2}{m^2+2}$，……6分

又$\overrightarrow{TA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，可得$(x_1,y_1+\dfrac{\sqrt{2}}{m})=\lambda_1(\sqrt{2}-x_1,-y_1)$，

所以$\lambda_1=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{my_1}$，

又$\overrightarrow{TB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，同理可得$\lambda_2=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{my_2}$，

所以 $\lambda_1+\lambda_2=-2-\frac{\sqrt{2}}{m}(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2})$,

因为 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}\cdot(-\frac{m^2+2}{2})=\sqrt{2}m$,

所以 $\lambda_1+\lambda_2=-2-\frac{\sqrt{2}}{m}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=-2-\frac{\sqrt{2}}{m}\cdot\sqrt{2}m=-4$,

故 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值是定值,且 $\lambda_1+\lambda_2=-4$.……8分

②若 $m=0$,则直线 l 为 $x=\sqrt{2}$,此时四边形 $ABGD$ 为矩形,根据对称性可知直线 AG 与 BD 相交于 F,K 的中点 N ,易知 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$;……9分

若 $m\neq 0$,由题意,可知 $D(2\sqrt{2},y_1),G(2\sqrt{2},y_2)$,

所以直线 AG 的方程为 $y-y_2=\frac{y_2-y_1}{2\sqrt{2}-x_1}(x-2\sqrt{2})$,

当 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, $y=y_2+\frac{y_2-y_1}{2\sqrt{2}-x_1}(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2(2\sqrt{2}-x_1)y_2-\sqrt{2}(y_2-y_1)}{2(2\sqrt{2}-x_1)}=$

$\frac{2(2\sqrt{2}-my_1-\sqrt{2})y_2-\sqrt{2}(y_2-y_1)}{2(2\sqrt{2}-x_1)}=\frac{\sqrt{2}(y_2+y_1)-2my_1y_2}{2(2\sqrt{2}-x_1)}=\frac{\sqrt{2}\times(-\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2})-2m\times(-\frac{2}{m^2+2})}{2(2\sqrt{2}-x_1)}=$

$\frac{-4m+4m}{2(2\sqrt{2}-x_1)(m^2+2)}=0$,

所以点 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$ 在直线 AG 上,

同理可知,点 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$ 也在直线 BD 上.

所以 $m\neq 0$ 时,直线 AG 与 BD 也相交于定点 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$.……11分

综上所述, m 变化时,直线 AG 与 BD 相交于定点 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$.……12分

22.解:(1)当 $a=1$ 时, $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

$\therefore f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}=0$.得 $x=1$

$\therefore$ 存在平行于 x 轴的切线,切点为 $(1,e)$

$\therefore$ 切线方程为 $y=e$……3分

(2) $\because x>0,a>0$,

$\therefore g(x)=f(x)-e(x-a\ln x)$ 恰有两个零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $\frac{e^x}{x^a}=e(\ln e^x-\ln x^a)=e\ln\frac{e^x}{x^a}$ 有两个不等的实数解,

令 $t=\frac{e^x}{x^a}>0$,则 $t=e\ln t$.……5分

令 $h(t)=e\ln t-t$，则 $h'(t)=\frac{e}{t}-1$.

$\therefore$ 当 $0<t<e$ 时，$h'(t)>0$；当 $t>e$ 时，$h'(t)<0$.

$\therefore$ 函数 $h(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

$\because$ $h(e)=0$，$\therefore$ 方程 $t=e\ln t$ 有唯一解 $t=e$.

$\therefore$ 方程 $\frac{e^x}{x^a}=e\ln\frac{e^x}{x^a}$ 有两个不等的实数解 $\Leftrightarrow$ 方程 $e=\frac{e^x}{x^a}$ 有两个不相等的实数解.

$\Leftrightarrow$ 方程 $a\ln x=x-1$ 有两个不相等的实数解.……8分

令 $k(x)=a\ln x-x+1$，则 $k'(x)=\frac{a}{x}-1$.

$\because$ $a>0$，$\therefore$ 当 $0<x<a$ 时，$k'(x)>0$；当 $x>a$ 时，$k'(x)<0$.

$\therefore$ 函数 $k(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.

$\because$ $x\to 0^+$，$k(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$，$k(x)\to-\infty$.

$\therefore$ 需要 $k(a)=a\ln a-a+1>0$，即 $\ln a+\frac{1}{a}-1>0$.……10分

令 $m(a)=\ln a+\frac{1}{a}-1$，则 $m'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}$.

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，$m'(a)<0$；当 $a>1$ 时，$m'(a)>0$.

$\therefore$ 函数 $m(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\because m(1)=0$，$\therefore$ 当 $a\neq 1$ 时，$\ln a+\frac{1}{a}-1>0$ 恒成立.

$\therefore a$ 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.……12分