

2022-2023学年度下学期“抚顺六校协作体”

期末考试试题

高一数学

考试时间：120分钟 试卷满分：150分

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。每题四个选项只有一个符合题目要求。

1. 已知 i 为虚数单位，若复数 $z = \frac{4-i^2}{2-i}$ ，则 $\bar{z}$ 的虚部是（ ）

- A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

2. 若扇形的面积为 $\frac{\pi}{2}$ ，半径为4，则该扇形的圆心角为（ ）

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{16}$

3. 设 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 是非零向量，“ $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ”是“ $\vec{a} = \vec{b}$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 下列命题正确的是（ ）

- (1) 已知平面 α 和直线 m ， n ，若 $m//\alpha$ ， $n \subset \alpha$ ，则 $m//n$ ；
(2) 已知平面 α ， β 和直线 m ， n ，且 m ， n 为异面直线， $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ，若直线 l 满足 $l \perp m$ ， $l \perp n$ ， $l \not\subset \alpha$ ， $l \not\subset \beta$ ，则 α 与 β 相交，且交线平行于 l ；
(3) 已知平面 α ， β 和直线 m ， n ，若 $m \subset \alpha$ ， $n \subset \alpha$ ， $m//\beta$ ， $n//\beta$ ，则 $\alpha//\beta$ ；
(4) 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp PB$ ， $PB \perp PC$ ， $PC \perp PA$ ，垂足都为 P ，则 P 在底面上的射影是三角形 ABC 的垂心。

- A. (2) (4) B. (2) (3) (4) C. (3) (4) D. (1) (2)

5. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2\sin x \cos x - \sin^4 x$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期为（ ）

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

6. 已知函数 $y = 2 - a^{x-2}$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$)的图象过定点 P ， O 为坐标原点，射线 OP 是角 θ 的终

边, 则 $\frac{\sin \theta - 2 \cos \theta}{2 \sin \theta + \cos \theta}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{5}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{3}{2}$

7. 设 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若 $\sin \alpha = 3 \sin(\alpha + 2\beta)$, 则 $\tan(\alpha + 2\beta)$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 在《九章算术》中, 底面为矩形的棱台被称为“刍童”. 已知棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 是一个侧棱相等、高为1的“刍童”, 其中 $AB=2A'B'=2$, $BC=2B'C'=2\sqrt{3}$, 则该“刍童”外接球的表面积为 ()

- A. 20π B. $\frac{20}{3}\pi$ C. $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ D. $5\sqrt{5}\pi$

二、多项选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 计20分. 在每小题给出的选项中, 有多个选项是符合题目要求的, 全部选对得5分, 有选错的得零分, 部分选对得2分.

9. 已知复数 $z = \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}$, 则 ()

- A. $z + \bar{z} = |z|$ B. $\bar{z}$ 在复平面内对应的点在第四象限

- C. z 虚部为 $\frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. z 是关于 x 的方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的一个根

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $b=4$ 且 $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : 2 : \sqrt{7}$, 下列说法正确的是 ()

- A. $\triangle ABC$ 为钝角三角形 B. AB 边的中线长为3
C. $\triangle ABC$ 周长为 $6+2\sqrt{7}$ D. $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 $\frac{28\pi}{3}$

11. 已知平面四边形 $ABCD$, O 是四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 则四边形 $ABCD$ 是平行四边形
B. 若 $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}|$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形
C. 若 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$, 则四边形 $ABCD$ 是矩形

D. 若动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + m \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \sin \angle ABC} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \sin \angle ACB} \right)$ ($m > 0$), 则动点 P 的轨迹一定通过

$\triangle ABC$ 的重心

12. 我国有着丰富悠久的“印章文化”, 古时候的印章一般用贵重的金属或玉石制成, 本是官员或私人签署文件时代表身份的信物, 后因其独特的文化内涵, 也被作为装饰物来使用. 图1是明清时期的一个金属印章摆件, 除去顶部的环可以看作是一个正四棱柱和一个正四棱锥组成的几何体; 如图2, 已知正四棱柱和正四棱锥的高相等, 且底面边长均为2, 若该几何体的所有顶点都在球 O 的表面上, 则

()



图1

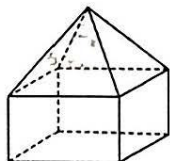


图2

- A. 球 O 的表面积为 9π
- B. 正四棱柱和正四棱锥的高均为 $\frac{1}{2}$
- C. 正四棱柱和正四棱锥组成的几何体的表面积为 $12 + 4\sqrt{2}$
- D. 正四棱锥的侧面、侧棱与其底面所成的角分别为 α 、 β ($\alpha < \frac{\pi}{2}$), 则 $\alpha < \beta$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. i 是虚数单位，已知 $|\omega - 1| = |\omega - i|$ ，写出一个满足条件的复数 ω _____。
14. 已知 $\triangle ABC$ 中， D 为边 BC 上的点，且 $2BD = DC$ ，若 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m, n \in R$)，则 $m - n =$ _____。
15. 由华裔建筑师贝聿铭设计的巴黎卢浮宫金字塔的形状可视为一个正四棱锥，其侧面三角形底边上的高与底面正方形边长的比值为 $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ，则以该四棱锥的高为边长的正方形面积与该四棱锥的侧面积之比为_____。
16. 若函数 $f(x) = 4\sin \omega x \sin^2\left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 2\omega x - 1$ ($\omega > 0$) 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有且仅有一个最大值点，则 ω 的取值范围是_____。

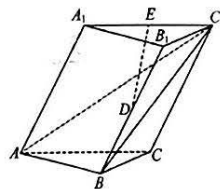
四、解答题（17题10分，18题—22题每题12分，合计70分）

17. 已知 $\vec{a} = (-1, 2)$ ， $\vec{b} = (1, -4)$ 。
- (1) 若 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直，求实数 k 的值；
- (2) 若 θ 为 $4\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角，求 $\cos \theta$ 的值。
18. 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ ， $\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$ ，且 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 。
- (1) 求 $\tan 2\alpha$ 的值； (2) 求 β 。

19. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长都为 2, D 和 E 分别是 BB_1 和 A_1C_1 的中点.

(1) 求证: 直线 $DE \parallel$ 平面 ABC_1 ;

(2) 若 $\angle A_1AC = 60^\circ$, 点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $\sqrt{3}$, 求三棱锥 $D-ABC_1$ 的体积.



20. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其面积为 S , 且

$$(b-a)(b+a) + ac \cos B = \frac{2\sqrt{3}}{3} S$$

(1) 求角 A 的大小;

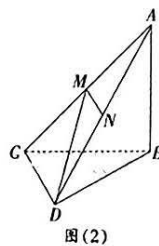
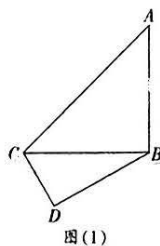
(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 S 的取值范围.

21. 如图 (1), 平面四边形 $ABDC$ 中, $\angle ABC = \angle D = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $CD = 1$, 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 边折起如图 (2), 使_____.

点 M, N 分别为 AC, AD 中点. 在题目横线上选择下述其中一个条件, 然后解答此题. ① $AD = \sqrt{7}$. ② AC 为四面体 $ABDC$ 外接球的直径. ③ 平面 $ABC \perp$ 平面 BCD .

(1) 判断直线 MN 与平面 ABD 是否垂直, 并说明理由;

(2) 求直线 DM 和 BC 所成的角的余弦值.



22. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - 2 \cos^2\left(\frac{\omega x + \varphi}{2}\right) + 1$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 为奇函数, 且 $f(x)$ 图象的相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到函数

$y = g(x)$ 的图象, 记方程 $g(x) = \frac{4}{3}$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 上的根从小到大依次为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 试确定 n 的值, 并求 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n$ 的值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线