参考答案

一、选择题　1. B　2. D　3. B　4. D　5. A　6. A　7. C　8. B

二、多选题　9. ABD　10. AC　11. CD　12. BD

12. 解析：令$F(x)=\dfrac{f(x)}{x},x>0$.则$F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}}{x}>0$

所以函数$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

对于A：由于$e^{x_1}>1$,所以$F(e^{x_1})>F(1)$,

即$\dfrac{f(e^{x_1})}{e^{x_1}}>\dfrac{f(1)}{1}$.所以$f(e^{x_1})>f(1)e^{x_1}$,故$A$不正确.

对于B：由于$x_2+\dfrac{1}{x_2}\geq 2$,所以$F(x_2+\dfrac{1}{x_2})\geq F(2)$,

即$\dfrac{f(x_2+\dfrac{1}{x_2})}{x_2+\dfrac{1}{x_2}}\geq\dfrac{f(2)}{2}$.所以$x_2f(x_2+\dfrac{1}{x_2})\geq\dfrac{x_2^{\,2}+1}{2}f(2)$,故$B$正确.

对于C：由$F(x_1+x_2)>F(x_1)$得：$\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}>\dfrac{f(x_1)}{x_1}$,

即：$\dfrac{x_1}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)>f(x_1)$.

同理：$\dfrac{x_2}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)>f(x_2)$.

两式相加得：$f(x_1+x_2)>f(x_1)+f(x_2)$.故C不正确.

对于D：$f(x_1)-\dfrac{x_2}{x_1}f(x_1)=\dfrac{x_1-x_2}{x_1}f(x_1)$;

$\dfrac{x_1}{x_2}f(x_2)-f(x_2)=\dfrac{x_1-x_2}{x_2}f(x_2)$.

两式相减得：$f(x_1)-\dfrac{x_2}{x_1}f(x_1)-\dfrac{x_1}{x_2}f(x_2)+f(x_2)=\dfrac{x_1-x_2}{x_1}f(x_1)-\dfrac{x_1-x_2}{x_2}f(x_2)$

$=(x_1-x_2)\left(\dfrac{f(x_1)}{x_1}-\dfrac{f(x_2)}{x_2}\right)>0$.

所以$f(x_1)-\dfrac{x_2}{x_1}f(x_1)-\dfrac{x_1}{x_2}f(x_2)+f(x_2)>0$,即：$f(x_1)+f(x_2)>\dfrac{x_2}{x_1}f(x_1)+\dfrac{x_1}{x_2}f(x_2)$.

故D正确.　所以答案为AD.

三、填空题　13. 80　14. $4x-6y+\pi=0$　15. $\dfrac{5}{12}$　16. $9+4\sqrt{2}$

16. 解析：因为$e^{x+y}=(2x+y)e^{1-x}$，所以$\frac{e^{x+y}}{e^{1-x}}=(2x+y)$，即$e^{2x+y-1}=2x+y$，

令$t=2x+y-1$，则$t>-1$，从而$e^{t}=t+1$

又因为$e^{t}\geq t+1$（当且仅当$t=0$时取等号）

所以$2x+y-1=0$，即$2x+y=1$，

又$\frac{x+4y}{xy}=\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)\times 1=\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)\times(2x+y)=8+\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}+1\geq 9+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=9+4\sqrt{2}$

当且仅当$x=\frac{4-\sqrt{2}}{7}$，$y=\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$取等号.

四、解答题

17. 解：(1) 由题意可知：

$\begin{cases}2^{n}=32\\(1+a)^{n}=243\end{cases}$ ……………………………………………………2 分

解得：$\begin{cases}n=5\\a=2\end{cases}$ ……………………………………………………4 分

(2) 由 (1) 可知二项式为$\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^{5}$其通项公式为：

$T_{k+1}=C_5^k\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{5-k}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{k}=2^{k}C_5^k\cdot x^{\frac{5-3k}{2}}\ (k=0,1,2,3,4,5)$ ……………………6 分

由二项式展开式的通项公式可知：

当$k=1,3,5$时，会得到二项式展开式的有理项.

所以二项式$\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^{5}$的展开式中有理项共 3 项.……………………………………8 分

所以将展开式各项重新排列，求其中有理项互不相邻的概率为：$P=\frac{A_3^3\cdot A_4^3}{A_6^6}=\frac{1}{5}$………10 分

18. (1) 解：由表中数据知，$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$.……………………………………1 分

$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}=\frac{4400}{5}=880$.……………………………2 分

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$ ....3 分

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{11850-5\times880\times3}{55-5\times3^2}=-135$ ....5 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=880-(-135)\times3=1285$ ....7 分

故所求经验回归方程为 $\hat{y}=-135x+1285$ ....8 分

(2) 解：令 $x=6$，则 $\hat{y}=-135\times6+1285=475$ 人 ....11 分

预计该路口第 6 周未规范佩戴头盔的人数为 475 人. ....12 分

19. 解: (1) 零假设为 H_0：数学成绩优秀与及时复习没有关联.

根据数据计算

$\chi^2=\dfrac{60(25\times20-5\times10)^2}{30\times30\times35\times25}=\dfrac{108}{7}\approx15.429>10.828$， ....3 分

依据 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，可以推断 H_0 不成立，即认为"数学成绩优秀"与"及时复习"有关系，该推断犯错误的概率不超过 0.001 ....4 分

(2) 根据分层抽样方法得，选取的 7 人中，及时复习的有 5 人，不及时复习的有 2 人 ....5 分

X 的所有可能取值为：1，2，3. ....6 分

$P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\dfrac{1}{7}$，$P(X=2)=\dfrac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\dfrac{4}{7}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_5^3}{C_7^3}=\dfrac{2}{7}$， ....9 分

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{2}{7}$

........................10 分

所以 X 的数学期望

$E(X)=1\times\dfrac{1}{7}+2\times\dfrac{4}{7}+3\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{15}{7}$ ....12 分

20. 解：（1）由函数 $f(x)$ 的定义域为 R 知，当 $f(x)$ 为幂函数时，

应满足$\begin{cases}\frac{1}{3}(a-2)=1\\ b-8=0\\ c-1=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{1}{3}(a-2)=0\\ b-8=1\\ c-1=0\end{cases}$ ……………………………3 分

解得，a、b、c的值分别为：

$a=5,b=8,c=1$，或

$a=2,b=9,c=1$……………………………………………………4 分

（2）方法一

①当$a=2$时，$f(x)=(b-8)x+c-1\ (x\in\mathbf{R})$

由题意知，$0<b<8$，所以 $ab<16$.……………………………………………5 分

②当$a>2$时，函数$f(x)$图象的对称轴为$x=\frac{3(8-b)}{2(a-2)}$，

以题意得：$\frac{3(8-b)}{2(a-2)}\geq 3$，即$2a+b\leq 12$

所以$12\geq 2a+b\geq 2\sqrt{2ab}$， $ab\leq 18.$

当且仅当$a=3,b=6$时取等号……………………………………………8 分

③当$0<a<2$时，

以题意得：$\frac{3(8-b)}{2(a-2)}\leq\frac{1}{2}$，即$a+3b\leq 26$，即$0<b\leq\frac{1}{3}(26-a)$

又因为$0<a<2$，

所以$0<ab\leq\frac{1}{3}a(26-a)=-\frac{1}{3}(a-13)^2+\frac{169}{3}<-\frac{1}{3}(2-13)^2+\frac{169}{3}=16$……………11 分

综上可得，ab的最大值为 18.………………………………………………12 分

（2）方法二

由$f(x)=\frac{1}{3}(a-2)x^2+(b-8)x+c-1\ (x\in\mathbf{R})$

得：$f'(x)=\frac{2}{3}(a-2)x+(b-8)\ (x\in\mathbf{R})$

由函数$f(x)$在区间$[\frac{1}{2},3]$上单调递减知：

当$x\in[\frac{1}{2},3]$时，恒有$f'(x)\le 0$

①当$a=2$时，$f'(x)=(b-8)<0$（此时$f'(x)=0$不合题意）

$b<8$，所以 $ab<16$……………………………………………………5 分

②当$a>2$时，函数$f'(x)$区间$[\frac{1}{2},3]$为增函数，

故只须：$f'(3)\le 0$，即$2a+b\le 12$

所以$12\ge 2a+b\ge 2\sqrt{2ab}$，　$ab\le 18$.

当且仅当$a=3,b=6$时取等号……………………………………8 分

③当$0<a<2$时，

函数$f'(x)$区间$[\frac{1}{2},3]$为减函数，

故只须：$f'(\frac{1}{2})\le 0$，即$a+3b\le 26$，即$0<b\le\frac{1}{3}(26-a)$

又因为$0<a<2$，

所以$0<ab\le\frac{1}{3}a(26-a)=-\frac{1}{3}(a-13)^2+\frac{169}{3}<-\frac{1}{3}(2-13)^2+\frac{169}{3}=16$……………11 分

综上可得，ab的最大值为 18.………………………………………12 分

21. 解：（1）因为 10 件产品中恰有 1 件不合格品的概率为

$f(x)=C_{10}^{1}x(1-x)^9$……………………………1 分

所以$f'(x)=10[(1-x)^9-9x(1-x)^8]=10(1-x)^8(1-10x)$…………………………………3 分

令$f'(x)=0$，得$x=0.1$.

当$x\in(0,0.1)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(0.1,1)$时，$f'(x)<0$.

所以$f(x)$在$(0,0.1)$上单调递增；在$(0.1,1)$上单调递减……………………………5 分

所以$f(x)$的最大值点为$x_0=0.1$……………………………………………………6 分

（2）由（1）知，$x=0.1$.

①令Y表示余下的 90 件产品中的不合格品件数，依题意

知：$Y\sim B(90,0.1)$，……………………………7 分

$X=10\times 2.5+20Y$,即$X=25+20Y$.……………………………………………………9 分

所以 $E(X)=E(25+20Y)=25+20E(Y)=25+20\times90\times0.1=205.$ …………10 分

②如果对余下的产品作检验，则这一箱产品所需要的检验费为250元.………………11 分

由于 $E(X)=205<250$, 故不应该对该箱余下的产品作检验.…………12 分

22. 解：（1）因为 $f(x)\geq0$，所以 $x\ln x-mx+1\geq0$，即 $\ln x-m+\dfrac{1}{x}\geq0$.

所以 $m\leq\ln x+\dfrac{1}{x}$……………………1 分

令 $F(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}(x>0)$， 所以

$F'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$……………………2 分

令 $F'(x)=0$，解得：$x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$.

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.……………………4 分

所以 $F(x)_{\min}=F(1)=1$, 故 $m\leq1$……………………5 分

（2）方法一:因为 a, b 是 $x\ln x-mx+1=0$ 的两个不相等的实数根，不妨设 $b>a>0$；

所以 $a\ln a-ma+1=0$ ① $b\ln b-mb+1=0$ ②

由①②可得：$ma=a\ln a+1$ ③ $mb=b\ln b+1$ ④……………………6 分

由（1）知当 $m\leq1$ 时 $f(x)\geq0$ 恒成立，方程 $f(x)=0$ 不可能有两个不相等的实数根.

所以 $m\neq0$. 由③④可得：

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{b\ln b+1}{a\ln a+1}$ 即 $ab=\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}$ ⑤.……………………7 分

要证 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>2$，即证 $\dfrac{a+b}{ab}>2\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{2}>ab$，⑥

由 ⑤⑥知, 即证：$\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}$，又 $b>a>0$，

所以即证：$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{b+a}=\dfrac{2(\frac{b}{a}-1)}{\frac{b}{a}+1}$，……………………9 分

令$t=\dfrac{b}{a}$，则$t>1$，

令$G(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$……10分

$$G'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0,$$

所以$G(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，……11分

$G(t)>G(1)=0$，所以$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，从而得证……12分

（2）方法二：因为a，b是$x\ln x-mx+1=0$的两个不相等的实数根，不妨设$b>a>0$；

所以$a\ln a-ma+1=0$ ① $b\ln b-mb+1=0$ ②

由①②可得：$m=\ln a+\dfrac{1}{a}$ ③ $m=\ln b+\dfrac{1}{b}$ ④……6分

由③④可得：$\ln a+\dfrac{1}{a}=\ln b+\dfrac{1}{b}$ 即：

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\ln b-\ln a=\ln\dfrac{b}{a}$……7分

令$t=\dfrac{b}{a}$，则$t>1$，

所以$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{at}=\ln t$ 解得：$\dfrac{1}{a}=\dfrac{t\ln t}{t-1}$；$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\ln t}{t-1}$

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{t\ln t}{t-1}+\dfrac{\ln t}{t-1}=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$……9分

要证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$，只需证：$\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0$

令$G(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$……10分

$$G'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0,$$

所以$G(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增……11分

$G(t)>G(1)=0$，所以$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，从而得证……12分

（2）方法三：因为a，b是$x\ln x-mx+1=0$的两个不相等的实数根

所以$a\ln a-ma+1=0$ ① $b\ln b-mb+1=0$ ②

由①②可得：$m=\ln a+\dfrac{1}{a}$ ③ $m=\ln b+\dfrac{1}{b}$ ④

由③④可得：$\ln a+\dfrac{1}{a}=\ln b+\dfrac{1}{b}$ 即：$\dfrac{1}{a}-\ln\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}-\ln\dfrac{1}{b}=m$

所以$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$是方程$x-\ln x=m$的两个不同实数根……………………………………7 分

令$h(x)=x-\ln x-m$，则$h(\frac{1}{a})=h(\frac{1}{b})$.

$h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

令$h'(x)=0$，解得：$x=1$

当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$.

所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递减；在$(1,+\infty)$上单调递

增……………………………………………………8 分

不妨设$0<\frac{1}{b}<1<\frac{1}{a}$

要证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$　　即证：$\frac{1}{a}>2-\frac{1}{b}>1$

只需证：$h(\frac{1}{a})>h(2-\frac{1}{b})$

即证：$h(\frac{1}{b})>h(2-\frac{1}{b})$

即证：$h(\frac{1}{b})-h(2-\frac{1}{b})>0$……………………………………………9 分

令$H(x)=h(x)-h(2-x),x\in(0,1)$……………………………………………10 分

则$H'(x)=1-\frac{1}{x}+1-\frac{1}{2-x}=\frac{-2(x-1)^2}{x(2-x)}<0$

所以$H(x)$在$(0,1)$单调递减……………………………………………11 分

所以$H(x)>H(1)=0$，所以$H(\frac{1}{b})>0$，即$h(\frac{1}{b})-h(2-\frac{1}{b})>0$，从而得证…………12 分