参考答案

1．C

求出A中不等式的解集确定出A，求出B中x的范围确定出B，找出A与B的交集即可

由A中不等式变形可得：$(x-1)(x-5)\leq 0$，解得$1\leq x\leq 5$

$\therefore A=[1,5]$

由B中$y=\sqrt{x-3}$得到$x-3\geq 0$，即$x\geq 3$

$\therefore B=[3,+\infty)$

则$A\cap B=[3,5]$

故选C

本题主要考查的是集合的交集及其运算，属于基础题.

2．C

根据给定条件，利用复数的乘方、加减运算计算即可判断作答.

因$z=1+\mathrm{i}$，则$z^2-2z=(1+\mathrm{i})^2-2(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}-2-2\mathrm{i}=-2$，

所以所求共轭复数为-2，其虚部为0.

故选：C

3．A

根据等差数列的前n项和公式、等差数列的通项公式进行求解即可.

依题意得，八个子女所得棉花斤数依次构成等差数列，设该等差数列为$\{a_n\}$，公差为d，前n项和为S_n，第一个孩子所得棉花斤数为a_1，

则由题意得，$d=17,S_8=8a_1+\dfrac{8\times 7}{2}\times 17=996$，

解得$a_1=65$，$\therefore a_8=a_1+(8-1)d=184$.

故选：A

4．C

根据正态分布的对称性，由题中条件，直接求解即可.

因为$X\sim N(2,\sigma^2)$，$P(-1<X\leq 2)=P(2\leq X<5)$并且$P(X\geq 2)=0.5$

又因为$P(-1<X\leq 2)=3P(X>5)$，所以

$P(X \geq 2)=P(2 \leq X<5)+P(X>5)=4P(X>5)=0.5$，所以 $P(X>5)=0.125$

所以 $P(2 \leq X<5)=0.5-0.125=0.375$，所以 $P(-1<X \leq 5)=0.75$

故选：C

5．C

由同角三角函数的基本关系与二倍角公式和诱导公式求解即可

因为 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}<0$，

所以 $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\frac{7}{8}$，且 $2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right),k\in Z$，

所以 $\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right),k\in Z$，

所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\pm\sqrt{\frac{7}{8}}=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$，

所以 $\sin\left(\alpha-\frac{25\pi}{6}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}-4\pi\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$.

故选：C.

6．C

由题意结合椭圆的定义求出 $|PF_1|=\frac{5}{2},|PF_2|=\frac{3}{2}$，又因为 $|F_1F_2|=2c=2$，由余弦定理可求出 $\cos\angle F_1PF_2$，再求出 $\sin\angle F_1PF_2$，由三角形的面积公式即可得出答案.

因为椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，则 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$，

F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，

因为点 P 到两个焦点的距离之差为 1，

所以假设 $|PF_1|>|PF_2|$，则 $\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=1\\|PF_1|+|PF_2|=2a=4\end{cases}$，

解得：$|PF_1|=\frac{5}{2},|PF_2|=\frac{3}{2}$，又因为 $|F_1F_2|=2c=2$，

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理可得：$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2^2}{2\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{5}$，

所以$\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{4}{5}$，

所以$\triangle PF_1F_2$的面积为：$S=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{2}$.

故选：C.

7．C

根据三角恒等变换化简$f(x)$，结合函数单调区间和取得最值的情况，利用整体法即可求得参数的范围.

因为$f(x)=4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega x}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)-1=4\sin\dfrac{\omega x}{2}\left(\cos\dfrac{\omega x}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin\dfrac{\omega x}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)-1$

$=2\sqrt{3}\sin\dfrac{\omega x}{2}\cos\dfrac{\omega x}{2}+2\sin^2\dfrac{\omega x}{2}-1=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

因为$f(x)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right]$上单调递增，由$x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，则

$\omega x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{3}\omega-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}\right]$,

则$-\dfrac{\pi}{3}\omega-\dfrac{\pi}{6}\ge-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}$，解得$\omega\le1,\omega\le\dfrac{8}{9}$，即$0<\omega\le\dfrac{8}{9}$；

当$x\in[0,\pi]$时，$\omega x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}\right]$，要使得该函数取得一次最大值，

故只需$\dfrac{\pi}{2}\le\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5}{2}\pi$，解得$\omega\in\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{8}{3}\right)$；

综上所述，ω的取值范围为$\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{8}{9}\right]$.

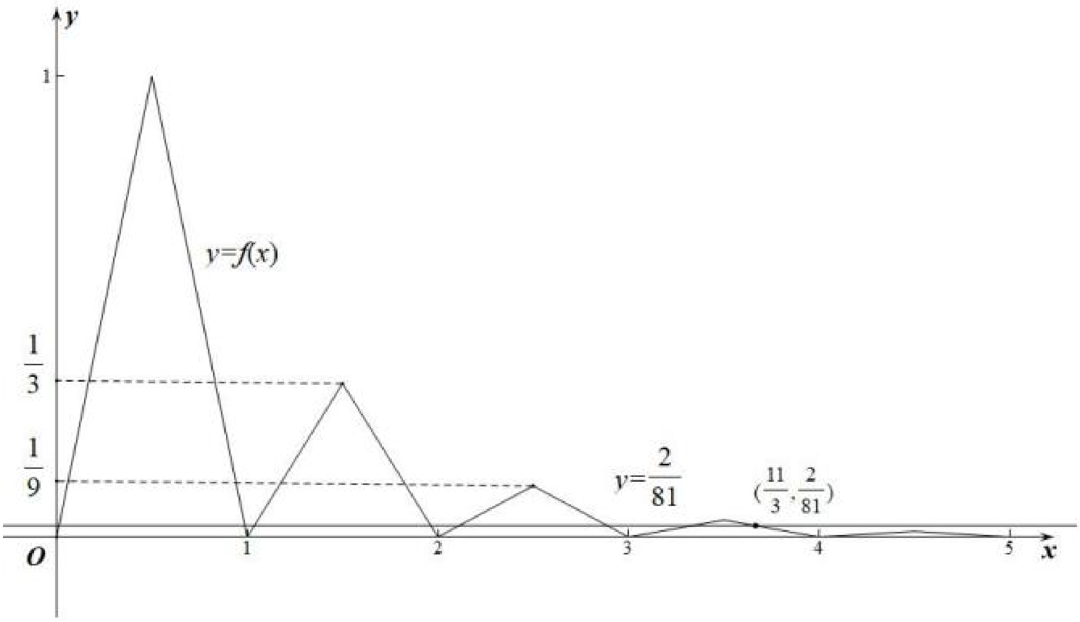
故选：C.

8．B

根据已知，利用分段函数的解析式，结合图像进行求解.

因为当$x\in[0,1)$时，$f(x)=1-|2x-1|$，所以$f(x)=\begin{cases}2x,0\le x<\dfrac{1}{2}\\2-2x,\dfrac{1}{2}\le x<1\end{cases}$，

又因为函数$f(x)$满足$f(x+1)=\dfrac{1}{3}f(x)$，所以函数$f(x)$的部分图像如下，



由图可知，若对$\forall x\in[m,+\infty)$，都有$f(x)\leq\frac{2}{81}$，则$m\geq\frac{11}{3}$.故A，C，D错误.

故选：B.

9．BC

根据阿波罗尼斯圆的定义，结合两点间距离公式逐一判断即可.

在平面直角坐标系xOy中，A（-2，0），B（4，0），点P满足$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，设$P$（$x$，$y$），则

$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，化简得（$x+4$）$^2+y^2=16$，所以A错误；

假设在x轴上存在异于A，B的两点D，E使得$\frac{|PD|}{|PE|}=\frac{1}{2}$，设$D$（$m$，0），$E$（$n$，0），则

$\sqrt{(x-n)^2+y^2}=2\sqrt{(x-m)^2+y^2}$，化简得$3x^2+3y^2-(8m-2n)x+4m^2-n^2=0$，由轨迹$C$的方程为$x^2+y^2+8x=0$，可得$8m-2n=-24$，$4m^2-n^2=0$，

解得$m=-6$，$n=-12$或$m=-2$，$n=4$（舍去），即在x轴上存在异于A，B的两点D，E使$\frac{|PD|}{|PE|}=\frac{1}{2}$，所以B正确；

当A，B，P三点不共线时，$\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{1}{2}=\frac{|PA|}{|PB|}$，

可得射线PO是$\angle APB$的平分线，所以C正确；

若在 C 上存在点 M，使得 $|MO|=2|MA|$，可设 M（x，y），

则有 $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，化简得 $x^2+y^2+\frac{16}{3}x+\frac{16}{3}=0$，与 $x^2+y^2+8x=0$ 联立，方程组无解，故不存在点 M，所以 D 错误.

故选：BC

关键点睛：运用两点间距离公式是解题的关键.

10．BC

根据已知求出 a 的范围即可.

$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $x\in[0,a]$，所以 $x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},a+\frac{\pi}{3}\right]$

又因为 $f(x)$ 的值域是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，所以 $a+\frac{\pi}{3}\in\left[\pi,\frac{5\pi}{3}\right]$

可知 a 的取值范围是 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$.

故选：BC.

11．ACD

根据伯努利数的定义以及二项式定理，将 $B_n\,(n\in\mathrm{N})$ 写成递推公式的形式，逐一代入计算即可判断选项.

由 $B_0=1,B_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kB_k\,(n\geqslant 2)$ 得，

$B_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kB_k=\mathrm{C}_n^0B_0+\mathrm{C}_n^1B_1+\mathrm{C}_n^2B_2+\mathrm{C}_n^3B_3+\cdots\cdots+\mathrm{C}_n^nB_n\,(n\geq 2)$，

所以，$\mathrm{C}_n^0B_0+\mathrm{C}_n^1B_1+\mathrm{C}_n^2B_2+\mathrm{C}_n^3B_3+\cdots\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}B_{n-1}=0(n\geq 2)$，

同理，$\mathrm{C}_{n+1}^0B_0+\mathrm{C}_{n+1}^1B_1+\mathrm{C}_{n+1}^2B_2+\mathrm{C}_{n+1}^3B_3+\cdots\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}B_{n-1}+\mathrm{C}_{n+1}^nB_n=0(n\geq 1)$，

所以，$\mathrm{C}_{n+1}^nB_n=-\left(\mathrm{C}_{n+1}^0B_0+\mathrm{C}_{n+1}^1B_1+\mathrm{C}_{n+1}^2B_2+\mathrm{C}_{n+1}^3B_3+\cdots\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}B_{n-1}\right)(n\geq 1)$，

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\left(\mathrm{C}_{n+1}^0B_0+\mathrm{C}_{n+1}^1B_1+\mathrm{C}_{n+1}^2B_2+\mathrm{C}_{n+1}^3B_3+\cdots\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}B_{n-1}\right)(n\geq 1)$$

其中第 $m+1$ 项为

$$\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^mB_m=\frac{1}{n+1}\times\frac{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots(n-m+2)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\times m}B_m=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+2)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\times m}B_m$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+2)(n-m+1)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\times m}\frac{B_m}{n-m+1}=\mathrm{C}_n^m\frac{B_m}{n-m+1}$$

即可得 $B_n=-\left(\mathrm{C}_n^0\frac{B_0}{n+1}+\mathrm{C}_n^1\frac{B_1}{n}+\mathrm{C}_n^2\frac{B_2}{n-1}+\cdots\cdots+\mathrm{C}_n^m\frac{B_m}{n-m+1}+\cdots\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}B_{n-1}\right)(n\geq 1)$

令$n=1$，得$B_1=-\left(C_1^0\dfrac{B_0}{1+1}\right)=-\dfrac{1}{2}$；

令$n=2$，得$B_2=-\left(C_2^0\dfrac{B_0}{3}+C_2^1\dfrac{B_1}{2}\right)=-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{6}$；

令$n=3$，得$B_3=-\left(C_3^0\dfrac{B_0}{4}+C_3^1\dfrac{B_1}{3}+C_3^2\dfrac{B_2}{2}\right)=-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)=0$

同理，可得$B_4=-\dfrac{1}{30},B_5=0,B_6=\dfrac{1}{42},B_7=0,B_8=-\dfrac{1}{30},B_9=0,B_{10}=\dfrac{5}{66},B_{11}=0$；

即可得选项 AC 正确，B 错误；

由上述前 12 项的值可知，当n为奇数时，除了B_1之外其余都是 0，

即$B_{2n+1}=0(n\ge 1)$，也即$B_{2n+3}=0,n\in\mathbf{N}$；所以 D 正确.

故选：ACD.

12．ABD

先由周期范围及ω为正整数求得$\omega=1$，再由$f(x)$平移后关于原点对称求得$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，从而得到$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

对于 AB，将$x=-\dfrac{\pi}{6}$与$x=-\dfrac{5\pi}{12}$代入检验即可；

对于 C，利用换元法得到$\sin t=\dfrac{1}{2}$在$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}\right]$内只有两个解，从而可以判断；

对于 D，利用整体法及$y=\sin x$的单调性即可判断.

因为$f(x)=\sin(2\omega x+\varphi)$，$T\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，所以$\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{2\pi}{|2\omega|}<\dfrac{3\pi}{2}$，解得$\dfrac{2}{3}<|\omega|<\dfrac{4}{3}$，

又ω为正整数，所以$\omega=1$，所以$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

所以函数$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度后所得图象对应的函数

$$g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{3}\right),$$

（点拨：函数$y=\sin\omega x(\omega>0)$的图象经过平移变换得到$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象时，不是平移$|\varphi|$个单位长度，而是平移$\dfrac{|\varphi|}{\omega}$个单位长度），

由题意知，函数$g(x)$的图象关于原点对称，故$\varphi-\dfrac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$k=0$，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，所以$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

对于 A，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin 0=0$，故 A 正确；

对于 B，$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$，故 B 正确；

对于 A，令 $t=2x+\frac{\pi}{3}$，因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]$，

显然 $\sin t=\frac{1}{2}$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]$ 内只有 $\frac{5\pi}{6}$，$\frac{13\pi}{6}$ 两个解，即方程 $f(x)=\frac{1}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上只有两个解，故 C 错误；

对于 A，当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，

因为 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故 D 正确.

故选：ABD.

关键点点睛：求解此类问题的关键是会根据三角函数的图象变换法则求出变换后所得图象对应的函数解析式，注意口诀“左加右减，上加下减，横变 $\frac{1}{\omega}$，纵变 A”在解题中的应用.

13．$\frac{5}{6}$

先求出“所抽取的球中至少有一个红球”的对立事件的概率，再用 1 减去此概率的值，即得所求.

从中随机抽取 2 个球，所有的抽法共有 $C_4^2=6$ 种，

事件“所抽取的球中至少有一个红球”的对立事件为“所抽取的球中没有红球”，

而事件：“所抽取的球中没有红球”的概率为 $\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，

故事件“所抽取的球中至少有一个红球”的概率等于 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，

故答案为 $\frac{5}{6}$.

本题考查等可能事件的概率，“至多”、“至少”问题的概率通常求其的对立事件的概率，再用 1 减去此概率的值，属于简单题.

14．4

求得焦点 F 的坐标，直线 l 的方程，与抛物线的方程联立，即可求出 A、B 两点坐标；由导数的几何意义，求得切线 PA，PB 的方程，求得交点 P 的坐标，求得 M，N 的坐标，可得 $|MN|$，再由三角形的面积公式，计算可得所求值.

解：抛物线$C:x^2=4y$的焦点为$F(0,1)$ 且直线l的倾斜角为60° ， 则 $k_l=\sqrt{3}$，

所以直线l方程为$y-1=\sqrt{3}(x-0)$， 即$y=\sqrt{3}x+1$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨设A在第一象限，

联立$\begin{cases}y=\sqrt{3}x+1\\x^2=4y\end{cases}$ ， 消去y得 $x^2-4\sqrt{3}x-4=0$ 解得 $x_1=2\sqrt{3}+4$、$x_2=2\sqrt{3}-4$，

代入直线方程， 则$A\left(2\sqrt{3}+4,7+4\sqrt{3}\right)$、$B\left(2\sqrt{3}-4,7-4\sqrt{3}\right)$，

因为直线 l_1 与抛物线相切于点A，

即$y=\frac{1}{4}x^2$，则 $y'=\frac{1}{2}x$，

所以 $k_{l_1}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+4\right)=\sqrt{3}+2$ ，同理可得 $k_{l_2}=\sqrt{3}-2$ ，

则可得直线 l_1 方程为$y-\left(7+4\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}+2\right)\left[x-\left(2\sqrt{3}+4\right)\right]$，即 $y=\left(\sqrt{3}+2\right)x-7-4\sqrt{3}$ ，

则其与 x 轴交点， 令$\left(\sqrt{3}+2\right)x-7-4\sqrt{3}=0$ ， 则$x=\sqrt{3}+2$，所以$M\left(\sqrt{3}+2,0\right)$ ，

直线 l_2 的方程为$y-\left(7-4\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}-2\right)\left[x-\left(2\sqrt{3}-4\right)\right]$ ，即 $y=\left(\sqrt{3}-2\right)x-7+4\sqrt{3}$ ，

则其与 x 轴交点， 令$\left(\sqrt{3}-2\right)x-7+4\sqrt{3}=0$ ， 则$x=\sqrt{3}-2$，所以$N\left(\sqrt{3}-2,0\right)$， 所以

$|MN|=4$，

联立l_1、l_2的方程$\begin{cases}y=\left(\sqrt{3}+2\right)x-7-4\sqrt{3}\\y=\left(\sqrt{3}-2\right)x-7+4\sqrt{3}\end{cases}$ ， 解得$\begin{cases}x=2\sqrt{3}\\y=-1\end{cases}$ ， 即P点坐标为$\left(2\sqrt{3},-1\right)$，

$S_{PFMN}=S_{\triangle FMN}+S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times1\times|MN|+\frac{1}{2}\times1\times|MN|=|MN|=4$.

故答案为：4.

15．$-\frac{9}{4}$

化简函数的解析式，利用换元法，通过二次函数的最值的求解即可.

解：$f(x)=(x^2+x)(x^2-5x+6)$

$=x(x+1)(x-2)(x-3)$

$=[x(x-2)][(x+1)(x-3)]$

$=(x^2-2x)(x^2-2x-3)$，

不妨令 $t=x^2-2x\geq-1$，则 $y=t(t-3)=(t-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$（$t\geq-1$），

所以当 $t=\frac{3}{2}$ 时，f（x）的取最小值 $-\frac{9}{4}$.

故答案为 $-\frac{9}{4}$

本题考查函数与方程的应用，考查转化思想以及计算能力.

16．$(5,+\infty)$

根据函数的对称性可求得 m 的值，将问题转化为 $g(x)=\left|x+\frac{1}{x}\right|+\left|1-x+\frac{1}{1-x}\right|$ 与 $y=a$ 有6个不同交点的问题，通过分类讨论和导数的方式得到 $g(x)$ 单调性和极值，进而确定 $g(x)$ 的图象，采用数形结合的方式得到结果.

$\because f(m-x)=\left|m-x+\frac{1}{m-x}\right|+\left|x+\frac{1}{x}\right|-a=f(x)$，\ $f(x)$ 图象关于 $x=\frac{m}{2}$ 对称，

又 $f(x)$ 的六个零点之和为3，$\therefore\frac{3}{6}=\frac{m}{2}$，解得：$m=1$，

$\therefore f(x)=\left|x+\frac{1}{x}\right|+\left|1-x+\frac{1}{1-x}\right|-a$，

令 $g(x)=\left|x+\frac{1}{x}\right|+\left|1-x+\frac{1}{1-x}\right|$，则 $g(x)$ 与 $y=a$ 有6个不同交点，

$\therefore g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+1,\frac{1}{2}<x<1\\2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-1,x>1\end{cases}$；

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}>0$，$\therefore g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$g'(x)=2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{2x^4-4x^3+2x-1}{x^2(x-1)^2}$，

$\because g'(2)=\frac{3}{4}>0$，$g'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{22}{9}<0$

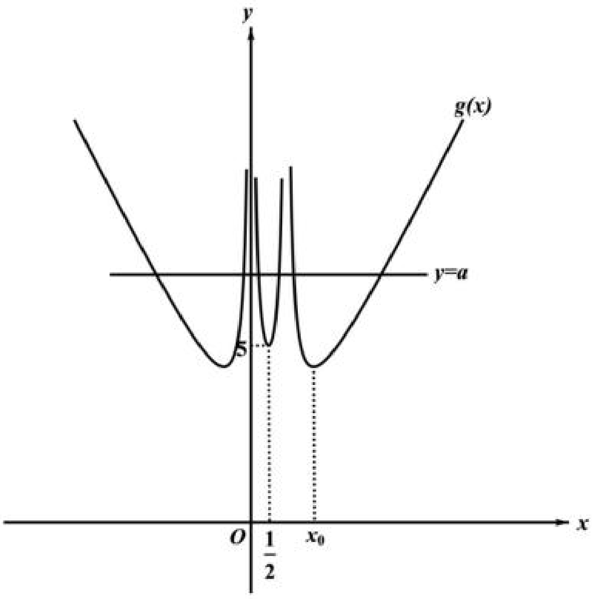
又 $y=\frac{1}{x^2}$ 与 $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore\exists x_0\in\left(\frac{3}{2},2\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，且当 $x\in(1,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$；

$\therefore g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

$\because g\left(\frac{1}{2}\right)=5$，$g\left(x_0\right)<g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{14}{3}<5$，

结合$g\left(x\right)$对称性可得其大致图象如下图所示：



由图象可知：若$g\left(x\right)$与$y=a$有6个不同交点，则$a>5$，

即实数a的取值范围为$\left(5,+\infty\right)$.

故答案为：$\left(5,+\infty\right)$.

方法点睛：解决函数零点问题的基本方法：

（1）直接法：求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图象，然后将问题转化为函数图象与x轴的交点问题；

（2）构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

（3）分离变量法：由$f\left(x\right)=0$分离变量得出$a=g\left(x\right)$，将问题等价转化为直线$y=a$与函数$y=g\left(x\right)$的图象的交点问题.

17.（I）$\frac{17}{18}$；（II）见解析；（III）$\frac{13}{18}$.

试题分析：

（I）由题意结合对立事件概率公式可得至少回答对一个问题的概率为$\frac{17}{18}$.

（II）这位挑战者回答这三个问题的总得分X的所有可能取值为$-10,0,10,20,30,40$.计算各个分值相应的概率值即可求得总得分X的分布列；

（III）结合(II)中计算得出的概率值可得这位挑战者闯关成功的概率值为$\frac{13}{18}$.

试题解析：

（I）设至少回答对一个问题为事件A,则$P(A)=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{18}$.

（II）这位挑战者回答这三个问题的总得分X的所有可能取值为$-10,0,10,20,30,40$.

根据题意,$P(X=-10)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$,

$P(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{2}{9}$,

$P(X=10)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$,

$P(X=20)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$,

$P(X=30)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{2}{9}$,

$P(X=40)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$.

随机变量X的分布列是:

X	-10	0	10	20	30	40
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

（III）设这位挑战者闯关成功为事件B,则$P(B)=\frac{2}{9}+\frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{13}{18}$.

18．(1)$V(x)=-2\sqrt{2}x^3+60\sqrt{2}x^2$， $x\in(0,30)$

(2)当$x=20$cm时，包装盒的容积最大是$8000\sqrt{2}$ cm³

（1）设包装盒的高为h(cm)，底面边长为a(cm)，分别将a,h用x表示，求出函数的解析式，注明定义域即可．

（2）利用函数的导数判断函数的单调性，求解函数的最值即可．

（1）

解：设包装盒的高为h(cm)，底面边长为a(cm)，

则$a=\sqrt{2}x$，$h=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$，

所以$V(x)=a^2h=2\sqrt{2}(-x^3+30x^2)=-2\sqrt{2}x^3+60\sqrt{2}x^2$， $x\in(0,30)$；

（2）

解：由$V(x)=-2\sqrt{2}x^3+60\sqrt{2}x^2$，

可得$V'(x)=6\sqrt{2}x(20-x)$，

当$x\in(0,20)$时，$V'(x)>0$；当$x\in(20,30)$时，$V'(x)<0$，

所以函数$V(x)$在$(0,20)$上递增，在$(20,30)$上递减，

$\therefore$当$x=20$时，$V(x)$取得极大值也是最大值：$8000\sqrt{2}$．

所以当$x=20\mathrm{cm}$时，包装盒的容积最大是$8000\sqrt{2}\mathrm{cm}^3$．

19．(1)在$(-\infty,1+\ln 2a)$上单调递减，在$(1+\ln 2a,+\infty)$上单调递增

(2)证明见解析

（1）由导数分析单调性求解，

（2）由导数分析单调性，及零点存在性定理证明．

(1)

$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2ax$，设$g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2ax$，则$g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2a$．

当$a>0$时，令$g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2a=0$，则$x=1+\ln 2a$，

当$x\in(-\infty,1+\ln 2a)$时，$g'(x)<0$，$f'(x)$单调递减；

当$x\in(1+\ln 2a,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$f'(x)$单调递增．

所以$f'(x)$在$(-\infty,1+\ln 2a)$上单调递减，在$(1+\ln 2a,+\infty)$上单调递增．

(2)

证明：当$a=1$时，$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x^2$，$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2x$，

由（1）可知$f'(x)$的最小值为$f'(1+\ln 2)$，而$f'(1+\ln 2)=-2\ln 2<0$，又$f'(0)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$，

由函数零点存在定理可得存在$x_1\in(0,1+\ln 2)$使得$f'(x_1)=0$，又$f'(x)$在$(-\infty,1+\ln 2)$上单调递减，

所以当$x\in(-\infty,x_1)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(x_1,1+\ln 2a)$时，$f'(x)<0$，故x_1为$f(x)$的极大值点，

又 $f'(x)$ 在 $(1+\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $(1+\ln 2,+\infty)$ 上不存在极大值点，

所以 $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_1，

20．（1） $a_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}$；（2）详见解析

（1）由 $2a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$，得 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\frac{1}{2}$，根据等比数列通项公式得 $a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，再

根据累加法 得答案；

（2）根据等比数列求和即可得证.

即（1）因为 $a_1=1$，$a_2=2$，$2a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$，

所以 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\frac{1}{2},(n\geq 2)$，$a_2-a_1=1$，

所以 $a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$n\geq 2$，

所以 $a_n=\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-3}}+\cdots+\frac{1}{2^0}+a_1=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}+1=3-\frac{1}{2^{n-2}}$.

而 $a_1=1$ 也符合该式，故 $a_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}$.

（2）$b_n=\frac{1}{2^{n-2}}$，

$$\sum_{i=1}^{n}b_i=\frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<4$$

21．(1)距离最大值为 $2\sqrt{13}$，此时直线方程为 $2x+3y+8=0$；

(2) $\triangle AOB$ 面积的最小值为 4，此时直线方程为 $2x+y+4=0$；

（1）求出直线恒过定点 M，由两点间距离公式即可求出最大值，由两条直线垂直的充要条件求出直线的斜率，即可得到直线方程；

（2）设直线的方程为 $y+2=k(x+1)$，$k<0$，求出 $|OA|$，$|OB|$，利用三角形的面积公式结合基本不等式求解最小值，从而求出此时 k 的值，得到直线方程.

(1)

解：$\because$ 直线方程为 $(2-m)x+(2m+1)y+3m+4=0$，其中 $m\in R$，

即$m(-x+2y+3)+(2x+y+4)=0$，

令$\begin{cases}-x+2y+3=0\\2x+y+4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$，

故直线经过定点$M(-1,-2)$，

当m变化时，点$Q(3,4)$到直线的距离的最大值为$|QM|=\sqrt{(3+1)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{13}$，

此时，QM和直线垂直，所以直线的斜率为$-\frac{1}{k_{QM}}=-\frac{1}{\frac{4+2}{3+1}}=-\frac{2}{3}$，即$\frac{m-2}{2m+1}=-\frac{2}{3}$，解得$m=\frac{4}{7}$，

此时直线的方程为$2x+3y+8=0$；

(2)

解：因为直线经过定点$M(-1,-2)$，

设直线方程为$y+2=k(x+1)$，$k<0$，令$x=0$则$y=k-2$，令$y=0$，则$x=\frac{2}{k}-1$，

所以$|OA|=|\frac{2}{k}-1|$，$|OB|=|k-2|$，

所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}|\frac{2}{k}-1||k-2|=\frac{1}{2}\left|-\frac{(k-2)^2}{k}\right|$，

因为$k<0$，

则$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot[-\frac{(k-2)^2}{k}]=\frac{1}{2}[(-\frac{4}{k})+(-k)+4]\geq\frac{1}{2}\times(2\sqrt{(-\frac{4}{k})\cdot(-k)}+4)=4$，

当且仅当$-\frac{4}{k}=-k$，即$k=-2$时取等号，

所以$\triangle AOB$面积的最小值为4，此时直线的方程为$y+2=-2(x+1)$，即$2x+y+4=0$.

22．(1)极小值为$f\left(\frac{1}{2}\right)=3-\ln 2$，无极大值

(2)见解析

（1）由导数得出单调性进而得出极值；

（2）由导数得出$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，讨论①$1\leq a<b$，②$0<a\leq 1<b$两种情况，利用导数证明即可.

(1)

$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)}{x^2}(x>0)$

$f'(x)>0\Rightarrow x>\frac{1}{2}$；$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{2}$

即函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3-\ln 2$，无极大值.

(2)

$g(x)=-x\ln x+x^2-1, g'(x)=-\ln x+2x-1, g''(x)=\frac{2x-1}{x}$

$g''(x)>0\Rightarrow x>\frac{1}{2}$； $g''(x)<0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{2}$

即函数 $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，即 $g'(x)\ldots g'\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2>0$

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

不妨设 $a<b$，则①$1_{\text{,,}}\ a<b$，②$0<a_{\text{,,}}\ 1<b$

对于①$1_{\text{,,}}\ a<b$，因为函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(b)>g(a)\ldots g(1)=0$

所以 $g(a)+g(b)>0$

对于②$0<a_{\text{,,}}\ 1<b$，由 $ab>1$ 得，$a>\frac{1}{b}$，故 $g(a)>g\left(\frac{1}{b}\right)$

$g(a)+g(b)>g\left(\frac{1}{b}\right)+g(b)=\left(-b+\frac{1}{b}\right)\left(\ln b-b+\frac{1}{b}\right)$，由 $0<a_{\text{,,}}\ 1<b$ 知，$-b+\frac{1}{b}<0$

设 $\varphi(x)=\ln x-x+\frac{1}{x},(x>1)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-\left(x^2-x+1\right)}{x^2}$

而 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，所以 $\varphi'(x)<0$，即函数 $\varphi(x)=\ln x-x+\frac{1}{x},(x>1)$ 是单调减函数

$\varphi(x)<g(1)=0,(x>1)$，故 $g\left(\frac{1}{b}\right)+g(b)=\left(-b+\frac{1}{b}\right)\left(\ln b-b+\frac{1}{b}\right)>0$，即 $g(a)+g(b)>0$

综上，当 $ab>1$ 时，$g(a)+g(b)>0$.

关键点睛：对于②，在证明 $g(a)+g(b)>0$ 时，关键是利用 $g(a)>g\left(\frac{1}{b}\right)$ 将双变量变为单变量问题，再利用导数证明不等式 $g(a)+g(b)>0$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。