机密 ★ 启用前 **姓名_________准考证号___________**

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数学(理)风向卷（二）

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．已知全集 U，集合 A，$B(A\neq B)$为其子集，若 $B\cap(\complement_U A)=\varnothing$，则 $A\cup B=$(　　)

A．$\complement_U A$　　B．$\complement_U B$　　C．A　　D．B

【答案】C

【解析】集合的关系、集合的基本运算．因为 $B\cap(\complement_U A)=\varnothing$ 且 $A\neq B$，则有 B A，所以 $A\cup B=A$．故选 C．

2．复数 $z=\frac{1-i}{i}+2i$(i 为虚数单位)在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】B

【解析】复数的运算及其几何意义．因为 $z=\frac{1-i}{i}+2i=\frac{1}{i}-1+2i=-i-1+2i=-1+i$，所以复数 z 在复平面内对应的点为$(-1，1)$，位于第二象限，故选 B．

3．设公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_4=2a_5$，则$\frac{S_7}{S_4}=$(　　)

A．$\frac{7}{4}$　　B．-1　　C．1　　D．$\frac{5}{4}$

【答案】C

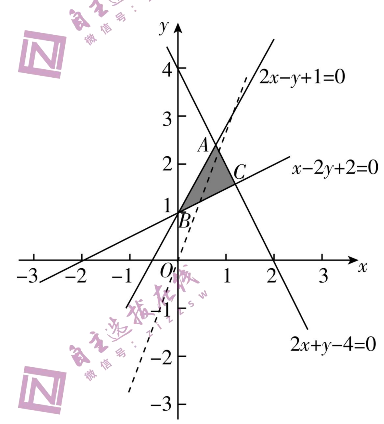
【解析】等差数列的性质、等差数列前 n 项和.在等差数列$\{a_n\}$中，$2a_5=a_4+a_6$，$a_4=2a_5$，故 $a_6=0$.又 $2a_6=a_5+a_7$，所以 $a_7=-a_5$，则 $S_7=S_4+a_5+a_6+a_7=S_4$，故$\frac{S_7}{S_4}=1$.故选 C.

4．若实数 x，y 满足约束条件$\begin{cases}2x+y-4\le 0,\\2x-y+1\ge 0,\\x-2y+2\le 0,\end{cases}$则目标函数 $z=3x-y$ 的最大值为(　　)

A．2　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\frac{22}{5}$　　D．5

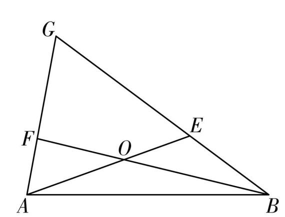
【答案】A

【解析】本题考查线性规划．根据实数 x，y 满足的约束条件作出可行域，如图中阴影部分所示(含边界)．



将目标函数 $z=3x-y$ 化为 $y=3x-z$，平移直线 $y=3x$，可知直线 $y=3x-z$ 经过点 C 时 z 取得最大值．联立$\begin{cases}x-2y+2=0,\\2x+y-4=0,\end{cases}$得 $C\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$.所以 $z_{max}=\frac{6}{5}\times 3-\frac{8}{5}=2$.故选 A.

8．在△ABG 中，已知$\overrightarrow{BE}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$，$AE$ 与 BF 交于点 O，则$\overrightarrow{AO}=$(　　)

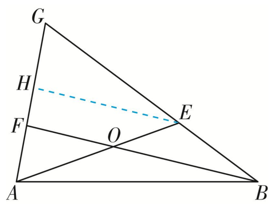


A．$\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BG}$　　B．$\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{BG}$

C．$\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{14}\overrightarrow{BG}$　　D．$\frac{3}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{BG}$

【答案】C

【考点】平面向量的线性运算



【详解】

如图，过点 E 作直线 $EH \parallel BF$ 交 AG 于点 H.

因为$\overrightarrow{BE}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BG}$，所以$\frac{FH}{HG}=\frac{BE}{EG}=\frac{3}{5}$，

因为$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$，所以设 $AF=1$，

则 $FG=2$，所以 $FH=2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$.

因为 $EH \parallel BF$，所以$\frac{AO}{AE}=\frac{AF}{AH}=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{4}{7}$，

所以$\overrightarrow{AO}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AE}=\frac{4}{7}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\frac{4}{7}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BG}\right)=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{14}\overrightarrow{BG}$.故选 C.

【关键点拨】平面向量的线性运算要多考虑结合平面几何中的位置关系和数量关系求解，例如本题中的三角形相似比.

6. 记一年为 365 天，我们可以把$(1+1\%)^{365}$看作每天的“进步”率都是 1%，一年后的值是 1.01^{365}，而把$(1-1\%)^{365}$看作每天的“退步”率都是 1%，一年后的值是 0.99^{365}.照此计算，若要使“进步”后的值是“退步”后的值的 10 倍，则大约需经过(参考数据：lg 1.01≈0.004 32，lg 0.99≈−0.004 36)(　　)

A．100 天　　B．108 天　　C．115 天　　D．124 天

【答案】C

【解析】本题考查指数式与对数式的互化、对数的换底公式．设大约需经过 x 天“进步”后的值是“退步”后的值的 10 倍，则 $1.01^x=10\times0.99^x$，即$\frac{1.01^x}{0.99^x}=10$，$\left(\frac{1.01}{0.99}\right)^x=10$，所以 $x=\log_{\frac{1.01}{0.99}}10=\frac{lg10}{lg\frac{1.01}{0.99}}$

$=\frac{1}{lg\frac{1.01}{0.99}}=\frac{1}{lg1.01-lg0.99}\approx\frac{1}{0.00432+0.00436}\approx115$(天).

所以若要使“进步”后的值是“退步”后的值的 10 倍，则大约需经过 115 天．故选 C.

7. 若圆 $x^2+y^2=4$ 的一条切线与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，则$|AB|$的最小值为(　　)

A．4　　B．$4\sqrt{2}$　　C．6　　D．8

【答案】A

【解析】本题考查直线与圆的位置关系．由题意设切线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\neq0$ 且 $b\neq0)$，即 $bx+ay-ab=0$.由题可知该圆的圆心为(0，0)，半径为 2，所以圆心到切线的距离 $d=\frac{|0+0-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，所以$|a|\cdot|b|=2\sqrt{a^2+b^2}\leq\frac{a^2+b^2}{2}$(当且仅当$|a|=|b|$时取等号)．令 $t=\sqrt{a^2+b^2}(t>0)$，则 $t^2-4t\geq0$，解得 $t\geq4$，所以 t 的最小值为 4.由题意知 $t=|AB|$，所以$|AB|$的最小值为 4.故选 A.

【一题多解】由题意设切点坐标为$(x_0，y_0)(x_0\neq0，y_0\neq0)$，$A(x_A，0)$，$B(0，y_B)$，则 $x_0^2+y_0^2=4$，切线方程为 $xx_0+yy_0=4$，得 $y_B=\frac{4}{y_0}$，$x_A=\frac{4}{x_0}$，$|AB|=\sqrt{x_A^2+y_B^2}=\sqrt{\frac{16(x_0^2+y_0^2)}{x_0^2y_0^2}}=\frac{8}{|x_0y_0|}$，$x_0^2+y_0^2=4\geq2|x_0y_0|$(当且仅当$|x_0|=|y_0|=\sqrt{2}$时取等号)，则$|AB|\geq4$.故选 A.

【关键点拨】若在解题过程中涉及直线的横截距和纵截距，则可以设直线的截距式方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\neq0$ 且 $b\neq0)$.

8．已知$(x^3+a)\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6$的展开式中各项系数的和为 3，则该展开式中常数项为(　　)

A．80　　B．160　　C．240　　D．320

【答案】D

【解析】本题考查二项式定理．令 $x=1$，得$(1+a)(2-1)^6=3$，解得 $a=2$.已知$\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6$展开式的通项 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r=(-1)^r2^{6-r}C_6^rx^{6-3r}$，则$(x^3+2)\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6$展开式中常数项为 $2\times(-1)^2\times2^{6-2}\times C_6^2+(-1)^3\times2^{6-3}\times C_6^3=320$.故选 D.

9．若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期为π，且其图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后所得图像对应的函数 $g(x)$为奇函数，则 $f(x)$的图像(　　)

A．关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称　　B．关于点$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$对称

C．关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$对称　　D．关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称

【答案】D

【解析】本题考查三角函数的图像与性质．由函数 $f(x)$的最小正周期 $T=\pi$可得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，则$\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，将其图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度可得 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=$

$2\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi)$的图像．若要使函数$g(x)$为奇函数，则$\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$．函数$f(x)$图像的对称轴方程为$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即$x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得A，C选项错误．由函数$f(x)$图像的对称中心的性质得$2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即对称中心的横坐标为$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得D选项正确，B选项错误．故选D.

【快解】求出$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$后，可以直接带入选项中的答案验证．当$x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)=0$，所以$f(x)$的图像关于点$(\frac{\pi}{6},0)$对称．故选D.

10．已知函数$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，记$a=f\left(2^{\frac{1}{\pi}}\right)$，$b=f\left(\log_{\pi}\frac{1}{2}\right)$，$c=f(\pi)$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为(　　)

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

【答案】C

【解析】本题考查函数的奇偶性，利用导数判断函数的单调性再比较函数值的大小．因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^x)=f(x)$，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上为偶函数．当$x>0$时，$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$b=f(\log_{\pi}\frac{1}{2})=f(\log_{\pi}2)$．所以$0<\log_{\pi}2<1<2^{\frac{1}{\pi}}<2<\pi$，即$b<a<c$.故选C.

11．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$的直线交双曲线右支于$A$，$B$两点．若$\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，且$\cos\angle F_1AF_2=\frac{4}{5}$，则该双曲线的离心率为(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{2}$

【答案】D　　【解析】本题考查双曲线的定义及离心率的相关计算．设$|AF_1|=m$，因为$\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，且$\cos\angle F_1AF_2=\frac{4}{5}$，所以在$Rt\triangle ABF_1$中，$\sin\angle F_1AF_2=\frac{3}{5}$，$|BF_1|=\frac{3}{5}m$，$|AB|=\frac{4}{5}m$.由双曲线的定义得$|BF_2|=\frac{3}{5}m-2a$，$|AF_2|=m-2a$.因为$|AF_2|+|BF_2|=|AB|$，所以有$m-2a+\frac{3}{5}m-2a=\frac{4}{5}m$，解得$m=5a$.所以在$Rt\triangle BF_1F_2$中，$|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即$9a^2+a^2=4c^2$，所以$a^2=\frac{2c^2}{5}$，解得离心率$e=\frac{\sqrt{10}}{2}$.故选D.

【关键点拨】设$|AF_1|=m$，根据$\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，且$\cos\angle F_1AF_2=\frac{4}{5}$，结合双曲线的定义求得$m=5a$，然后在$Rt\triangle BF_1F_2$中利用勾股定理得出关于$a$与$c$的关系式后即可得解.

12．已知函数$f(x)=\begin{cases}xe^x+\frac{1}{e},x\le 0,\\x^2-2x,x>0.\end{cases}$若函数$y=f(f(x)-a)$有四个零点，则实数$a$的取值范围为(　　)

A．$\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B．$\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$　　C．$(2，e)$　　D．$(-1，\sqrt{e})$

【答案】B　【解析】本题考查分段函数求零点问题．

已知函数$f(x)=\begin{cases}xe^x+\frac{1}{e},x\le 0,\\x^2-2x,x>0.\end{cases}$

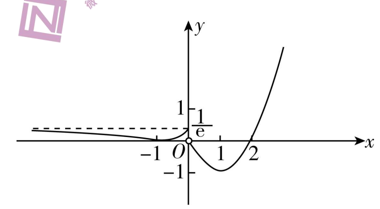
当$x>0$时，$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$，最小值为-1.

当$x\le 0$时，$f'(x)=(x+1)e^x$，令$f'(x)=0$，解得$x=-1$.

当$x<-1$时，$f'(x)<0$，当$-1<x<0$时，$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$(-\infty，-1)$上单调递减，在$(-1，0)$上单调递增，且$f(0)=\frac{1}{e}$，当$x\to-\infty$时，$f(x)\to\frac{1}{e}$.

综上，作出函数$f(x)$的大致图像，如图.



由图可知，函数$f(x)$有两个零点，即$x=-1$和$x=2$，(*)

由(*)式可知，$f(x)-a=-1$或$f(x)-a=2$，即$f(x)=a-1$或$f(x)=a+2$时满足题意．根据题意，这两个方程共有四个根，即函数$f(x)$的图像与直线$y=a-1$和直线$y=a+2$共有四个交点．结合$f(x)$的图像可知，当$a-1\in(-1，0]$时，$a+2\in(2，3]$，此时函数$f(x)$的图像与直线$y=a-1$和$y=a+2$有三个交点，即方程有三个根；当$a-1\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$a+2\in\left(3,\frac{1}{e}+3\right)$，此时函数$f(x)$的图像与直线$y=a-1$和$y=a+2$有四个交点，即方程有四个根，此时$a\in\left(1,\frac{1}{e}+1\right)$；同理，当$a-1\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，方程有两个根．综上，$a\in\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$满足题意．故选B.

【关键点拨】对于函数零点的判定，通常可以采用数形结合的方法，结合函数图像得出零点个数．对于复合函数，如$y=f(f(x))$这类函数问题，可以采用换元法，由里到外一层一层分析.

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13．已知递增的等比数列$\{a_n\}$的每一项都是正数，其前n项和为S_n.若$a_2+a_4=30$，$a_1a_5=81$，则$S_6=$________.

【答案】364

【解析】本题考查等比数列的通项公式，求和公式．

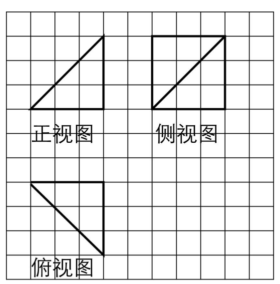
设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由$a_1a_5=81$，得$a_2a_4=81$，

联立$\begin{cases}a_2a_4=81,\\a_2+a_4=30,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_2=3,\\a_4=27\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=27,\\a_4=3.\end{cases}$

因为$\{a_n\}$为递增数列，所以$\begin{cases}a_2=3,\\a_4=27,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1q=3,\\a_1q^3=27,\end{cases}$

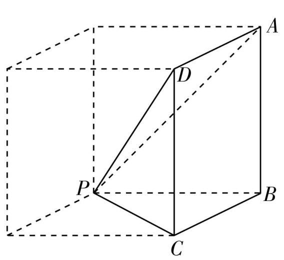
解得$q^2=9$.又因为等比数列$\{a_n\}$的每一项都是正数，所以$q=3$，$a_1=1$，所以$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{1-3^6}{1-3}=364$.

14．某几何体的三视图如图所示，若网格纸上的小正方形的边长为1，那么该几何体的表面积为________．



【答案】$9\sqrt{2}+18$

【解析】本题考查空间几何体的三视图及表面积．根据题中三视图还原几何体如图所示，该几何体是一个底面为正方形的四棱锥$P-ABCD$，将其补形成一个正方体．易知$PB\perp$平面$ABCD$，$BC\perp$平面PAB，则$\triangle PAD$，$\triangle PCD$，$\triangle PBC$，$\triangle PAB$均为直角三角形，故$S_{表面积}=S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAB}+S_{正方形ABCD}=\frac{1}{2}\times(3\times3\sqrt{2}+3\times3\sqrt{2}+3\times3+3\times3)+3\times3=9\sqrt{2}+18$.



15．已知命题p：$f(x)=\lg(ax^2-4x+a)$的定义域为**R**；命题q：不等式$2x^2+x\geq2+ax$在$x\in(-\infty,-1)$上恒成立．若“$p\vee q$”为真命题，“$p\wedge q$”为假命题，则实数a的取值范围为________．

【答案】[1，2]

【解析】本题考查真假命题的判断．若p为真命题，则$\begin{cases}16-4a^2<0,\\a>0,\end{cases}$解得$a>2$；若$q$为真命题，则$a\geq2x-\frac{2}{x}+1$在$x\in(-\infty,-1)$上恒成立．令$y=2x-\frac{2}{x}+1$，$x<-1$，可知$y'=2+\frac{2}{x^2}>0$，则$y=2x-\frac{2}{x}+1$在$(-\infty,-1)$上单调递增，∴当$x$趋近于$-1$时，$y$趋近于1，∴$a\geq1$.若$p\vee q$为真命题，$p\wedge q$为假命题，则$p$，$q$一真一假．若$p$为真命题$q$为假命题，则$\begin{cases}a>2,\\a<1,\end{cases}$解集为$\varnothing$；若$p$为假命题$q$为真命题，则$\begin{cases}a\leq2,\\a\geq1,\end{cases}$解得$1\leq a\leq2$.综上，实数$a$的取值范围为[1，2].

16．已知抛物线$x^2=2py(p>0)$的焦点为F，A，B为抛物线上的两个动点，且满足$\angle AFB=60°$，过弦AB的中点C作该抛物线准线的垂线，垂足为D，则$\frac{|AB|}{|CD|}$的最小值为________．

【答案】1

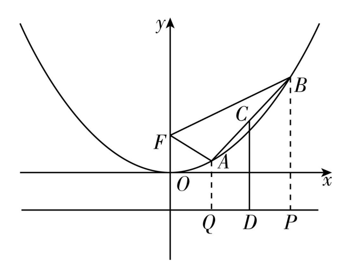
【解析】本题考查抛物线的定义及利用基本不等式求最值．

设$|AF|=a$，$|BF|=b$，过点A，作AQ垂直于准线，垂足为Q，过点B，作BP垂直于准线，垂足为P，如图．由抛物线定义，得$|AF|=|AQ|$，$|BF|=|BP|$，在梯形$ABPQ$中，有$2|CD|=|AQ|+|BP|=a+b$.

在$\triangle ABF$中，由余弦定理得$|AB|^2=a^2+b^2-2ab\cos60°=a^2+b^2-ab$，整理得$|AB|^2=(a+b)^2-3ab$.

∵$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，∴$(a+b)^2-3ab\geq(a+b)^2-\frac{3}{4}(a+b)^2=\frac{1}{4}(a+b)^2$，即$|AB|\geq\frac{1}{2}(a+b)=|CD|$，当且仅当$a=b$时，等号成立．

∴$\frac{|AB|}{|CD|}\geq1$，即$\frac{|AB|}{|CD|}$的最小值为1.



三、解答题(共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22，23题为选考题，考生根据要求作答)

17．(本小题满分12分)在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$C=2A$.

(1)求证：$c=2a\cos A$；

(2)若 $A<B<C$，$b=10$，且 $a+c=2b$，求△ABC 的面积．

【答案】利用正弦定理、余弦定理解三角形，三角形面积公式

(1)【证明】因为 $C=2A$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{2\sin A\cos A}$，又 $\sin A\neq0$，所以 $c=2a\cos A$．

(2)【解】由(1)得 $\cos A=\frac{c}{2a}$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{100+c^2-a^2}{20c}$，所以$\frac{c}{2a}=\frac{100+c^2-a^2}{20c}$，即$(10-a)c^2-100a+a^3=0$，①

将 $a+c=20$，$c=20-a$ 代入①，得$(10-a)(20-a)^2-100a+a^3=0$，即$(10-a)(8-a)=0$，解得 $a=8$ 或 $a=10$．

因为 $B>A$，所以 $b>a$，所以 $a=10$ 舍去，所以 $a=8$，$c=20-8=12$．

从而 $\cos A=\frac{c}{2a}=\frac{12}{2\times8}=\frac{3}{4}>0$，可知 $0<A<\frac{\pi}{2}$，

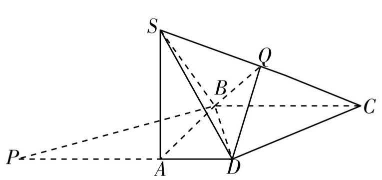
所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$．

所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times10\times12\times\frac{\sqrt{7}}{4}=15\sqrt{7}$．

18.(本小题满分 12 分)如图，在四边形 $PDCB$ 中，$PD\parallel BC$，$BA\perp PD$，$PA=AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$.沿 BA 将△PAB 翻折到△SAB 的位置，使得 $SD=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(1)作出平面 SCD 与平面 SAB 的交线 l，并证明 $l\perp$平面 CSB；

(2)Q 是棱 SC 上异于 S，C 的一点，连接 QD，当二面角 $Q-BD-C$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$时，求此时三棱锥 $Q-BCD$ 的体积．



【考点】线面垂直的判定，空间向量法求二面角的余弦值，三棱锥的体积

【答案】(1)【证明】如图，延长 BA，CD 交于 E，连接 SE，则 SE 为平面 SCD 与平面 SAB 的交线 l.

证明过程如下：在△SAD 中，$SA=1$，$AD=\frac{1}{2}$，$SD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $SA^2+AD^2=SD^2$，所以 $SA\perp AD$.

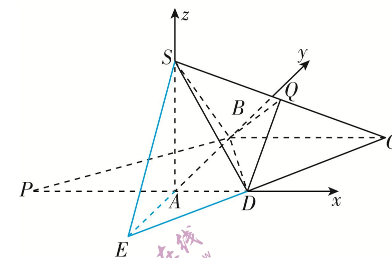
又 $AD\perp AB$，$SA\cap AB=A$，SA，$AB\subset$平面 SAB，所以 $AD\perp$平面 SAB.

因为 $BC\parallel AD$，所以 $BC\perp$平面 SAB，又 $SE\subset$平面 SAB，所以 $BC\perp SE$.

由 $PD\parallel BC$，$AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$，得 $AE=1$.

所以 $AE=AB=SA$，所以 $SE\perp SB$.

又 $BC\cap SB=B$，BC，$SB\subset$平面 CSB，所以 $SE\perp$平面 CSB，即 $l\perp$平面 CSB.



(2)【解】由(1)知，$SA\perp AB$，$AD\perp AB$，$AD\perp SA$.

以 A 为坐标原点，AD，AB，AS 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示．

易得 $A(0,0,0)$，$D\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$B(0,1,0)$，$S(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，则$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{2},-1,0\right)$.

设$\overrightarrow{SQ}=\lambda\overrightarrow{SC}(0<\lambda<1)$，则 $Q(\lambda,\lambda,1-\lambda)$，$\overrightarrow{BQ}=(\lambda,\lambda-1,1-\lambda)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 QBD 的法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BQ}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\lambda x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z=0,\\\frac{1}{2}x-y=0,\end{cases}$令 $x=2$，则 $\boldsymbol{n}=\left(2,1,\frac{1-3\lambda}{1-\lambda}\right)$.

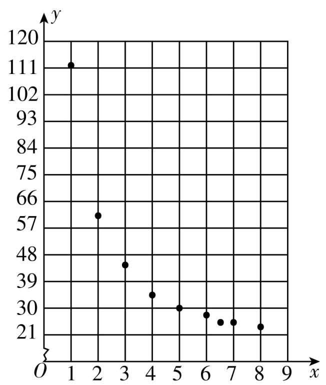
易知$\overrightarrow{AS}=(0,0,1)$是平面 CBD 的一个法向量．

由$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AS}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AS}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AS}|}=\frac{\left|\frac{1-3\lambda}{1-\lambda}\right|}{\sqrt{5+\left(\frac{1-3\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以$\lambda=\frac{1}{2}$，所以 Q 是棱 SC 的中点．

易知四边形 $ABCD$ 为直角梯形，其面积为$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times1=\frac{3}{4}$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $V_{Q-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times\frac{1}{2}SA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$，即三棱锥 $Q-BCD$ 的体积为$\frac{1}{12}$.

【方法速记】利用向量法求解空间二面角的相关问题的关键在于“四破”：第一，破“建系关”，构建恰当的空间直角坐标系；第二，破“求坐标关”，准确求解相关点的坐标；第三，破“求法向量关”，分别求出平面的法向量；第四，破“应用公式关”，根据所求问题进一步利用公式求解．

19.(本小题满分 12 分)某企业新研发了一种产品，产品的成本由原料成本及非原料成本组成．每件产品的非原料成本 y(元)与生产该产品的数量 x(千件)有关，经统计绘制了散点图，如图．



现用反比例函数模型 $y=a+\frac{b}{x}(a>0，b>0)$和指数函数模型 $y=ce^{dx}(c>0，d<0，e$ 为自然对数的底数)分别对两个变量的关系进行拟合，已知用指数函数模型拟合的回归方程为$y=96.54e^{-0.2x}$，$\ln y$ 与 x 的相关系数 $r_1=-0.94$．

(1)用反比例函数模型求 y 关于 x 的回归方程．

(2)用相关系数判断上述两个模型哪一个拟合效果更好(结果精确到 0.01)，并求产量为 10 千件时每件产品的非原料成本 y 的预测值．

(3)该企业采取订单生产模式(根据订单数量进行生产，即产品全部售出)，根据市场调研数据，若该产品单价定为 100 元，则签订 9 千件订单的概率为 0.8，签订 10 千件订单的概率为 0.2.若单价定为 90 元，则签订 10 千件订单的概率为 0.3，签订 11 千件订单的概率为 0.7.已知每件产品的原料成本为 10 元，根据(2)的结果，判断企业想获得更高的利润，产品单价应选择 100 元还是 90 元，请说明理由．

参考公式:对于一组数据$(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$,其回归直线 $\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为$\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$,$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$. 相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}v_i^2-n\bar{v}^2\right)}}$.

参考数据:

$\sum_{i=1}^{8}u_iy_i$	$\bar{u}$	$\bar{y}$	$\bar{u}^2$	$\sum_{i=1}^{8}u_i^2$	$\sum_{i=1}^{8}y_i$	$\sum_{i=1}^{8}y_i^2$	$\sqrt{0.61\times 6185.5}$
183.4	0.34	45	0.115	1.53	360	22385.5	61.4

其中 $u_i=\frac{1}{x_i}$.

【答案】【解】本题考查非线性回归方程的综合应用．

(1)已知 $u=\frac{1}{x}$,则 $y=a+\frac{b}{x}$可转化为 $y=a+bu(a>0,b>0)$.

由题表可得$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}u_iy_i-8\bar{u}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{8}u_i^2-8\bar{u}^2}=\dfrac{183.4-8\times0.34\times45}{1.53-8\times0.115}=100$,

则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{u}=45-100\times0.34=11$,所以 $\hat{y}=11+100u$,

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=11+\dfrac{100}{x}$.

(2)y 与$\frac{1}{x}$的相关系数为

$$r_2=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}u_iy_i-8\bar{u}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{8}u_i^2-8\bar{u}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{8}y_i^2-8\bar{y}^2\right)}}=\dfrac{61}{\sqrt{0.61\times6185.5}}=$$

$\dfrac{61}{61.4}\approx0.99$.

因为$|r_1|<|r_2|$,所以用反比例函数模型的拟合效果更好.

当 $x=10$ 时,$y=\dfrac{100}{10}+11=21$(元),

即当产量为 10 千件时,每件产品的非原料成本约为 21 元.

(3)①若产品单价为 100 元，记企业利润为 X(千元).

当签订订单为 9 千件时，每件产品的成本为$\frac{100}{9}$+21 元，企业的利润为 $9\times\left(100-\frac{100}{9}-21\right)=611$(千元)；

当签订订单为 10 千件时，每件产品的成本为 31 元，企业的利润为 $10\times(100-31)=690$(千元).

该企业利润 X(千元)的分布列为

X	611	690
P	0.8	0.2

所以 $E(X)=611\times0.8+690\times0.2=626.8$(千元).

②若产品单价为 90 元，记企业利润为 Y(千元).

当签订订单为 10 千件时，每件产品的成本为 31 元，企业的利润为 $10\times(90-31)=590$(千元)；

当签订订单为 11 千件时，每件产品的成本为$\frac{100}{11}$+21 元，企业的利润为 $11\times\left(90-\frac{100}{11}-21\right)=659$(千元).

该企业利润 Y(千元)的分布列为

Y	590	659
P	0.3	0.7

所以 $E(Y)=590\times0.3+659\times0.7=638.3$(千元).

综上，企业想获得更高利润，产品单价应选择 90 元.

20. (本小题满分 12 分)在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 $F(\sqrt{3}$, 0)，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 $D(1，3)$为椭圆外一点，过点 D 作两条斜率之和为 1 的直线，分别交椭圆于 A，B 两点和 P，Q 两点，线段 AB，PQ 的中点分别为 M，N，试证：直线 MN 过定点.

【思路导引】

(2) *设直线MN的方程为*$y=kx+m$ *直线AB, PQ的斜率分别为*k_1, k_2 → [*直线AB的方程与椭圆方程联立* *直线AB的方程与直线MN的方程联立*] → 关于 k_1, k_2 的一元二次方程$k_1+k_2=1$—— →m 和 k 的关系→直线 MN→直线 MN 所过定点

【考点】求椭圆方程、直线和椭圆的位置关系、直线过定点问题

【答案】

(1)【解】因为椭圆的右焦点为 $F(\sqrt{3}，0)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=2$，又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=1$.所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)【证明】设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，由题意知直线 MN 的斜率存在且不为 0，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$，直线 AB，PQ 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $k_1\neq k$，$k_2\neq k$，$k_1+k_2=1$，直线 AB 的方程为 $y-3=k_1(x-1)$.

联立$\begin{cases}y-3=k_1(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+4k_1^2)x^2+(24k_1-8k_1^2)x+4k_1^2-24k_1+32=0$，$\Delta>0$，

故 $x_1+x_2=\frac{8k_1^2-24k_1}{1+4k_1^2}$，$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k_1^2-12k_1}{1+4k_1^2}$.

联立$\begin{cases}y-3=k_1(x-1),\\ y=kx+m,\end{cases}$得 $x_M=\frac{k_1+m-3}{k_1-k}$，

所以$\frac{4k_1^2-12k_1}{1+4k_1^2}=\frac{k_1+m-3}{k_1-k}$，整理得$(4m+4k)k_1^2+(1-12k)k_1+m-3=0$，

同理有$(4m+4k)k_2^2+(1-12k)k_2+m-3=0$，

所以 k_1，k_2 是方程$(4m+4k)x^2+(1-12k)x+m-3=0$ 的两根，

则 $k_1+k_2=-\frac{1-12k}{4m+4k}$，即 $1=-\frac{1-12k}{4m+4k}$，所以 $m=2k-\frac{1}{4}$，

所以直线 MN 的方程为 $y=kx+2k-\frac{1}{4}=k(x+2)-\frac{1}{4}$，

故直线 MN 过定点$\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$.

21.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=e^x-mx^2(m\in\mathbf{R})$.

(1)若直线 $y=0$ 是曲线 $y=f(x)$的一条切线，求实数 m 的值；

(2)当 $x\geq0$ 时，$f(x)\geq2x-\sin x+1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】【解】本题考查导数的几何意义，不等式恒成立求参数范围.

(1)根据题意，设切点坐标为$(x_0，0)$，由 $f(x)=e^x-mx^2$ 可得 $f'(x)=e^x-2mx$，切线的斜率 $k=f'(x_0)=ex_0-2mx_0=0$.又因为切点$(x_0, 0)$在曲线 $y=f(x)$上，所以 $f(x_0)=ex_0-mx_0^2=0$，由$\begin{cases}ex_0-2mx_0=0,\\ ex_0-mx_0^2=0,\end{cases}$可得 $x_0=2$，$m=\frac{e^2}{4}$，所以实数 m 的值为$\frac{e^2}{4}$.

(2)当 $x\geq0$ 时，有 $f(x)\geq2x-\sin x+1$，则 $e^x-mx^2-2x+\sin x-1\geq0$ 对 $x\geq0$ 恒成立．令 $g(x)=e^x-mx^2-2x+\sin x-1(x\geq0)$，只需 $g(x)_{min}\geq0$.

对 $g(x)$ 求导得 $g'(x)=e^x-2mx-2+\cos x$，令 $h(x)=g'(x)(x\geq 0)$，则 $h'(x)=e^x-2m-\sin x$.

令 $t(x)=h'(x)$，$x\geq 0$，则 $t'(x)=e^x-\cos x\geq 0$，

所以 $t(x)$ 即 $h'(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递增，则 $h'(x)=t(x)\geq t(0)=1-2m$.

当 $1-2m\geq 0$，即 $m\leq\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)\geq h'(0)\geq 0$，所以 $h(x)$ 即 $g'(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)=h(x)\geq h(0)=0$，可得 $g(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{min}=g(0)=0$ 符合题意.

当 $1-2m<0$，即 $m>\frac{1}{2}$ 时，$h'(0)=1-2m<0$，

因为 $h'(x)=e^x-2m-\sin x$ 在 $[0，+\infty)$ 上单调递增，所以存在 $x_0\in(0，+\infty)$ 使得 $h'(x_0)=0$.当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$.所以 $h(x)$ 即 $g'(x)$ 在 $(0，x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0，+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g'(0)=0$，所以当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)<g'(0)=0$，

$g(x)$ 在 $(0，x_0)$ 上单调递减，所以当 $x\in(0，x_0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，不满足 $g(x)=e^x-mx^2-2x+\sin x-1\geq 0$ 恒成立，不符合题意，故舍去.

综上所述，实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

(二)选考题：共 10 分．请考生在第 22，23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．(本小题满分 10 分)选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=4t^2,\\y=4t\end{cases}$ (t 为参数)．以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-2=0$.

(1)求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的普通方程；

(2)若直线 l 与曲线 C 相交于 M，N 两点，求△OMN 的面积.

【答案】【解】本题考查参数方程与普通方程、极坐标方程与直角坐标方程的互化.

(1)由 $\begin{cases}x=4t^2,\\y=4t\end{cases}$ (t 为参数)，消去参数 t，可得曲线 C 的普通方程为 $y^2=4x$.将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-2=0$，

得 $2x-y-2=0$，即直线 l 的直角坐标方程为 $2x-y-2=0$.

(2)由(1)知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{5}}{5}m,\\y=\frac{2\sqrt{5}}{5}m\end{cases}$ (m 为参数)，

代入抛物线 $y^2=4x$，得 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}m\right)^2=4\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}m\right)$，

整理得 $m^2-\sqrt{5}m-5=0$.

设点 M，N 对应的参数分别为 m_1，m_2，则 $m_1+m_2=\sqrt{5}$，$m_1m_2=-5$，

$\therefore|MN|=|m_1-m_2|=\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+4\times 5}=5$，

原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$△OMN 的面积 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$.

23．(本小题满分 10 分)选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)<|3x-2|-5$ 的解集 A；

(2)在(1)的条件下，证明：对任意 a，$b\in A$，都有 $f(ab)>f(a)-f(-b)$ 成立.

【答案】本题考查绝对值不等式.

(1)【解】依题意，不等式 $f(x)<|3x-2|-5$，

即 $|x+1|-|3x-2|+5<0$.

当 $x<-1$ 时，原式$=-(x+1)+(3x-2)+5<0$，

解得 $x<-1$，则 $x<-1$；

当 $-1\leq x\leq\frac{2}{3}$ 时，原式$=(x+1)+(3x-2)+5<0$，

解得 $x<-1$，此时原不等式无解；

当 $x>\frac{2}{3}$ 时，原式$=(x+1)-(3x-2)+5<0$，解得 $x>4$，则 $x>4$.

综上，不等式 $f(x)<|3x-2|-5$ 的解集 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$.

(2)【证明】已知 $f(a)-f(-b)=|a+1|-|-b+1|=|a+1|-|1-b|\leq|a+b|$(当且仅当 $(a+b)(1-b)\geq 0$ 时取等号)，

$[f(ab)]^2-(a+b)^2=(ab+1)^2-(a+b)^2=a^2b^2+1-a^2-b^2=(a^2-1)(b^2-1)$，

因为 a，$b\in A$，所以 $a^2>1$ 且 $b^2>1$，即 $(a^2-1)(b^2-1)>0$，

所以 $[f(ab)]^2-(a+b)^2>0$，即 $[f(ab)]^2>(a+b)^2$.

而 $f(ab)=|ab+1|>0$，所以 $f(ab)>|a+b|\geq f(a)-f(-b)$，

所以对任意 a，$b\in A$，都有 $f(ab)>f(a)-f(-b)$ 成立