

文科数学

注意事项:

1. 本卷共 150 分, 考试时间 120 分钟. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束, 将本试题和答题卡一并交回.

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x \mid |x| < 2\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 2\}$ C. $\{-1, 0, 2\}$ D. $\{2, 3\}$
2. 已知复数 $z = (1-i)(2+ai)$ ($a \in \mathbf{R}$) 在复平面对应的点在实轴上, 则 $a =$ ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

3. 已知某地 A、B、C 三个村的人口户数及贫困情况分别如图 1 和图 2 所示, 为了解该地三个村的贫困原因, 当地政府决定采用分层随机抽样的方法抽取 15% 的户数进行调查, 则样本容量和抽取 C 村贫困户的户数分别是 ()

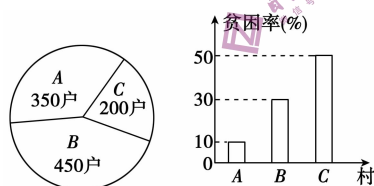
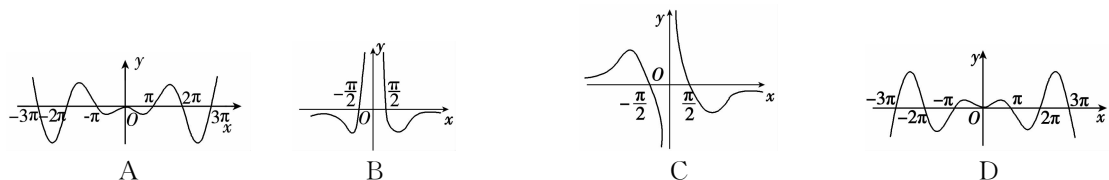


图 1 图 2

3. A. 150, 15 B. 150, 20
 C. 200, 15 D. 200, 20
4. 新疆棉花是世界上最优质的棉花之一, 普通的优质棉纱纤维长度 27 mm 左右, 而新疆超长棉纱纤维长度可以达到 37 mm 以上. 用超长棉纱制成的纯毛巾, 质地柔软, 手感舒适, 色彩鲜艳, 吸水性好. 某商场中有 5 款优质毛巾, 其中有 3 款是用新疆超长棉纱制成的, 在这 5 款毛巾中任选 2 款, 只有一款是用新疆超长棉纱制成的概率是 ()
 A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{9}{10}$

5. 下列函数既是奇函数又在 $(-1, 1)$ 上是增函数的是 ()
 A. $y = \sin x$ B. $y = x^{-\frac{2}{3}}$ C. $y = -x^3$ D. $y = -\cos(x - \frac{\pi}{2})$

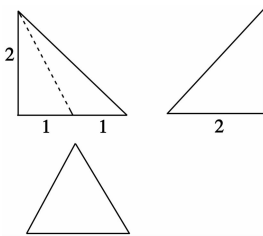
6. 函数 $f(x) = \frac{x \sin x}{2}$ 的图像大致为 ()



7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 3^{n-1} + t$, 则 $t =$ ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. 1 C. -1 D. $\frac{1}{3}$

8. 如图 3 所示, 是某三棱锥的三视图(由左至右, 由上至下依次是主视图、左视图、俯视图), 则该三棱锥的体积为 ()



- A. 4 B. $\frac{2}{3}$
 C. $\frac{4}{3}$ D. 1

9. $\sin 3 + \cos 3$ 的值所在的范围是 ()

- A. $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$
 C. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ D. $(-\sqrt{2}, -1)$

10. 已知一个圆台的上底面圆的半径为 2, 下底面圆的半径为 4, 体积为 28π , 则该圆台的高为 ()
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

11. 18 世纪数学家欧拉研究调和级数得到了以下的结果: 当 n 很大时, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma$ (常数 $\gamma = 0.557\dots$). 利用以上公式, 可以估计 $\frac{1}{10001} + \frac{1}{10002} + \dots + \frac{1}{30000}$ 的值为 ()

- A. $\ln 30000$ B. $\ln 3$ C. $4 - \ln 3$ D. $4 + \ln 3$

12. 果树的负载量, 是影响果树产量和质量的重要因素. 苹果树结果期的负载量 y (单位: kg) 与干周 x (树干横截面周长, 单位: cm) 可用模型 $y = b_0 + b_1 x^2 - b_2 x^3$ 模拟, 其中 b_0, b_1, b_2 均是常数. 则下列最符合实际情况的是 ()

- A. $b_2 = 0$ 时, y 是偶函数
 B. 模型函数的图象是中心对称图形
 C. 若 b_1, b_2 均是正数, 则 y 有最大值
 D. 苹果树负载量的最小值是 b_0

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 a, b 满足 $a = (2, 1)$, $|b| = \sqrt{3}$, $|a + b| = 4$, 则 $a \cdot b =$ _____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 通项公式 $a_n = \begin{cases} 2n-3, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 _____.

15. 已知直线 $l_1: y = 0, l_2: y = \sqrt{3}x$, 圆 C 的圆心在第一象限, 且与 l_1, l_2 都相切, 则圆 C 的一个方程为 _____.(写出满足题意的任意一个即可)

16. 若 F 是双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点, Q 是双曲线上的一点, 过点 F, Q 的直线 l 与 y 轴交于点 M , 且 $\overrightarrow{MQ} + 2\overrightarrow{QF} = \mathbf{0}$, 则直线 l 的斜率为 _____.

三、解答题:本大题共7小题,满分70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一) 必考题(60分)

17. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .已知 $2\sin B = \sin A + \cos A \cdot \tan C$.

- (1) 求 C 的值;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = 4$, 求 $a - c$.

18. (本小题满分12分)

某校工会开展健步走活动,要求教职工上传3月1日至3月7日的微信记步数信息,图4是职工甲和职工乙微信记步数情况:

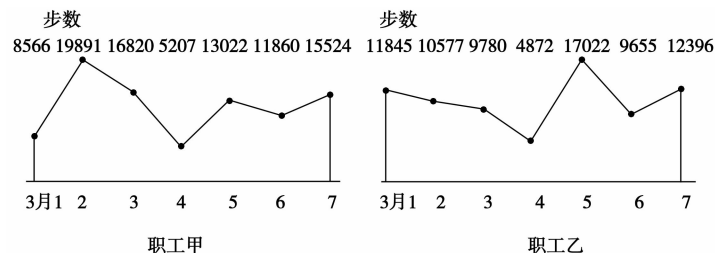


图4

- (1) 从3月2日至3月7日中任选一天,求这一天职工甲和职工乙微信记步数都不低于10000的概率;
- (2) 图5是校工会根据3月1日至3月7日某一天的数据制作的全校200名教职工微信记步数的频率分布直方图.已知这一天甲和乙微信记步数在单位200名教职工中排名(按照从大到小排序)分别为第68和第142,请指出这是根据哪一天的数据制作的频率分布直方图,并说明理由.

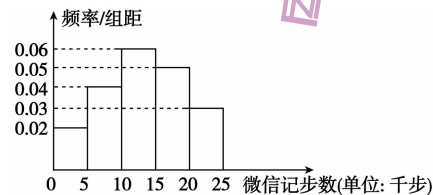


图5

19. (本小题满分12分)

如图6,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB \parallel CD$, $CB = CD = 1$.点 E 为棱 PC 的中点,点 F 为棱 AB 上的一点,且 $AB = 4AF$,平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$.

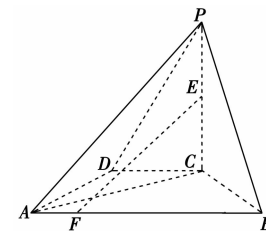


图6

- (1) 证明: $AC \perp$ 平面 PBC ;
- (2) 证明: $EF \parallel$ 平面 PAD .

20. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在点 $A(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 $l_1: y = k_1x + b_1$, 函数 $g(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在点 $B(x_2, g(x_2))$ 处的切线为 $l_2: y = k_2x + b_2$.

- (1) 若 l_1, l_2 均过原点,求这两条切线斜率之间的等量关系.
- (2) 当 $a = e$ 时,若 $l_1 \parallel l_2$,此时 $b_1 - b_2$ 的最大值记为 m ,证明: $3 - \ln 2 < m < \frac{5}{2}$.

21. (本小题满分12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 P 的横坐标为4,且 P 到焦点 F 的距离为5,

- (1) 求抛物线 C 的方程;
- (2) 点 A, B 是抛物线 C 上异于原点 O 的不同的两点,且满足 $\vec{OA} \cdot \vec{AB} = 0$,求 $|\vec{OB}|$ 的最小值.

(二) 选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分10分)[选修4-4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = m + \frac{1}{2m} \\ y = m - \frac{1}{2m} \end{cases} (m \text{ 为参数}),$$
以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$.

- (1) 求曲线 C 的普通方程以及直线 l 的直角坐标方程.
- (2) 已知直线 l 过点 $M(2, 0)$,与曲线 C 交于 P, Q 两点,求 $\frac{1}{|MP|} + \frac{1}{|MQ|}$ 的值.

23. (本小题满分10分)[选修4-5:不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x + 1| - 2|x + a|$.

- (1) 当 $a = -1$ 时,求不等式 $f(x) > -1$ 的解集;
- (2) 若不等式 $f(x) > 0$ 在 $[-3, -2]$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.