

# 文科数学

## 注意事项:

1. 本卷共 150 分, 考试时间 120 分钟. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束, 将本试题和答题卡一并交回.

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合  $A = \{x \mid |x| < 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 A.  $\{-1, 0\}$                       B.  $\{0, 2\}$                       C.  $\{-1, 0, 2\}$                       D.  $\{2, 3\}$
2. 已知复数  $z = (1-i)(2+ai)$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 在复平面对应的点在实轴上, 则  $a =$  ( )  
 A.  $\frac{1}{2}$                                   B.  $-\frac{1}{2}$                                   C. 2                                      D. -2

3. 已知某地 A、B、C 三个村的人口户数及贫困情况分别如图 1 和图 2 所示, 为了解该地三个村的贫困原因, 当地政府决定采用分层随机抽样的方法抽取 15% 的户数进行调查, 则样本容量和抽取 C 村贫困户的户数分别是 ( )

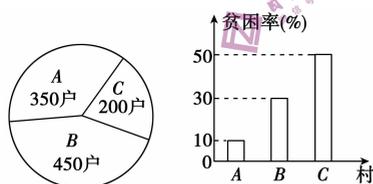
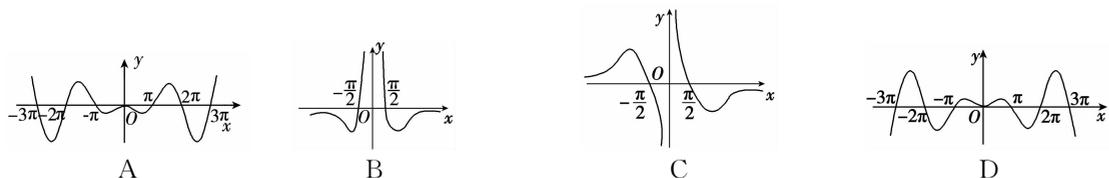


图 1                                  图 2

4. 新疆棉花是世界上最优质的棉花之一, 普通的优质棉纱纤维长度 27 mm 左右, 而新疆超长棉纱纤维长度可以达到 37 mm 以上. 用超长棉纱制成的纯毛巾, 质地柔软, 手感舒适, 色彩鲜艳, 吸水性好. 某商场中有 5 款优质毛巾, 其中有 3 款是用新疆超长棉纱制成的, 在这 5 款毛巾中任选 2 款, 只有一款是用新疆超长棉纱制成的概率是 ( )  
 A.  $\frac{3}{5}$                                   B.  $\frac{7}{10}$                                   C.  $\frac{4}{5}$                                   D.  $\frac{9}{10}$

5. 下列函数既是奇函数又在  $(-1, 1)$  上是增函数的是 ( )  
 A.  $y = \sin x$                       B.  $y = x^{-\frac{2}{3}}$                       C.  $y = -x^3$                       D.  $y = -\cos(x - \frac{\pi}{2})$

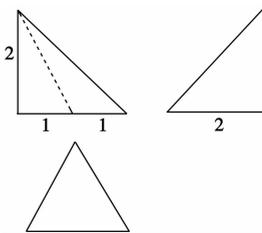
6. 函数  $f(x) = \frac{x \sin x}{2}$  的图像大致为 ( )



7. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_n = 3^{n-1} + t$ , 则  $t =$  ( )

- A.  $-\frac{1}{3}$                                   B. 1                                      C. -1                                      D.  $\frac{1}{3}$

8. 如图 3 所示, 是某三棱锥的三视图(由左至右, 由上至下依次是主视图、左视图、俯视图), 则该三棱锥的体积为 ( )



- A. 4                                      B.  $\frac{2}{3}$   
 C.  $\frac{4}{3}$                                       D. 1

9.  $\sin 3 + \cos 3$  的值所在的范围是 ( )

- A.  $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$                       B.  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$   
 C.  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$                               D.  $(-\sqrt{2}, -1)$

10. 已知一个圆台的上底面圆的半径为 2, 下底面圆的半径为 4, 体积为  $28\pi$ , 则该圆台的高为 ( )

- A. 3                                      B. 4                                      C. 5                                      D. 6

11. 18 世纪数学家欧拉研究调和级数得到了以下的结果: 当  $n$  很大时,  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma$  (常数  $\gamma = 0.557\dots$ ). 利用以上公式, 可以估计  $\frac{1}{10001} + \frac{1}{10002} + \dots + \frac{1}{30000}$  的值为 ( )

- A.  $\ln 30000$                               B.  $\ln 3$                                       C.  $4 - \ln 3$                               D.  $4 + \ln 3$

12. 果树的负载量, 是影响果树产量和质量的重要因素. 苹果树结果期的负载量  $y$  (单位: kg) 与干周  $x$  (树干横截面周长, 单位: cm) 可用模型  $y = b_0 + b_1 x^2 - b_2 x^3$  模拟, 其中  $b_0, b_1, b_2$  均是常数. 则下列最符合实际情况的是 ( )

- A.  $b_2 = 0$  时,  $y$  是偶函数  
 B. 模型函数的图象是中心对称图形  
 C. 若  $b_1, b_2$  均是正数, 则  $y$  有最大值  
 D. 苹果树负载量的最小值是  $b_0$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $a, b$  满足  $a = (2, 1)$ ,  $|b| = \sqrt{3}$ ,  $|a + b| = 4$ , 则  $a \cdot b =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知数列  $\{a_n\}$  通项公式  $a_n = \begin{cases} 2n-3, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前 10 项和为 \_\_\_\_\_.

15. 已知直线  $l_1: y = 0, l_2: y = \sqrt{3}x$ , 圆  $C$  的圆心在第一象限, 且与  $l_1, l_2$  都相切, 则圆  $C$  的一个方程为 \_\_\_\_\_.(写出满足题意的任意一个即可)

16. 若  $F$  是双曲线  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  的右焦点,  $Q$  是双曲线上的一点, 过点  $F, Q$  的直线  $l$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 且  $\overrightarrow{MQ} + 2\overrightarrow{QF} = \mathbf{0}$ , 则直线  $l$  的斜率为 \_\_\_\_\_.

三、解答题:本大题共7小题,满分70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题(60分)

17.(本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ .已知 $2\sin B = \sin A + \cos A \cdot \tan C$ .

- 求 $C$ 的值;
- 若 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b = 4$ ,求 $a - c$ .

18.(本小题满分12分)

某校工会开展健步走活动,要求教职工上传3月1日至3月7日的微信记步数信息,图4是职工甲和职工乙微信记步数情况:

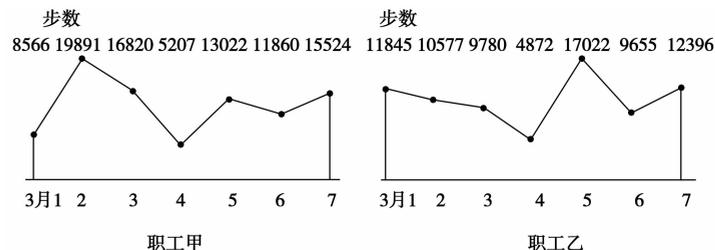


图4

- 从3月2日至3月7日中任选一天,求这一天职工甲和职工乙微信记步数都不低于10000的概率;
- 图5是校工会根据3月1日至3月7日某一天的数据制作的全校200名教职工微信记步数的频率分布直方图.已知这一天甲和乙微信记步数在单位200名教职工中排名(按照从大到小排序)分别为第68和第142,请指出这是根据哪一天的数据制作的频率分布直方图,并说明理由.

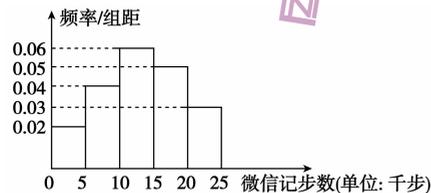


图5

19.(本小题满分12分)

如图6,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $\angle ABC = 60^\circ$ , $AB \parallel CD$ , $CB = CD = 1$ .点 $E$ 为棱 $PC$ 的中点,点 $F$ 为棱 $AB$ 上的一点,且 $AB = 4AF$ ,平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$ .

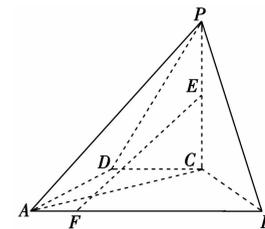


图6

- 证明: $AC \perp$ 平面 $PBC$ ;
- 证明: $EF \parallel$ 平面 $PAD$ .

20.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )在点 $A(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 $l_1: y = k_1x + b_1$ ,函数 $g(x) = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )在点 $B(x_2, g(x_2))$ 处的切线为 $l_2: y = k_2x + b_2$ .

- 若 $l_1, l_2$ 均过原点,求这两条切线斜率之间的等量关系.
- 当 $a = e$ 时,若 $l_1 \parallel l_2$ ,此时 $b_1 - b_2$ 的最大值记为 $m$ ,证明: $3 - \ln 2 < m < \frac{5}{2}$ .

21.(本小题满分12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ )上一点 $P$ 的横坐标为4,且 $P$ 到焦点 $F$ 的距离为5,

- 求抛物线 $C$ 的方程;
- 点 $A, B$ 是抛物线 $C$ 上异于原点 $O$ 的不同的两点,且满足 $\vec{OA} \cdot \vec{AB} = 0$ ,求 $|\vec{OB}|$ 的最小值.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分10分)[选修4-4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C$ 的参数方程为
$$\begin{cases} x = m + \frac{1}{2m} \\ y = m - \frac{1}{2m} \end{cases} (m \text{ 为参数}),$$
以坐标原点为极点, $x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$ .

- 求曲线 $C$ 的普通方程以及直线 $l$ 的直角坐标方程.
- 已知直线 $l$ 过点 $M(2, 0)$ ,与曲线 $C$ 交于 $P, Q$ 两点,求 $\frac{1}{|MP|} + \frac{1}{|MQ|}$ 的值.

23.(本小题满分10分)[选修4-5:不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x + 1| - 2|x + a|$ .

- 当 $a = -1$ 时,求不等式 $f(x) > -1$ 的解集;
- 若不等式 $f(x) > 0$ 在 $[-3, -2]$ 上恒成立,求实数 $a$ 的取值范围.