

## 2023 届高三开学摸底联考 新高考卷 数学 试卷

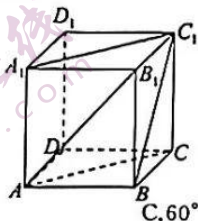
注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟, 满分 150 分

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$   
 A.  $\{4, 5\}$       B.  $\{0, 4, 5\}$       C.  $\{3, 4, 5\}$       D.  $\{0, 3, 4, 5\}$
2. 命题“ $\exists x_0 > 0, -x_0^2 + 2x_0 - 1 > 0$ ”的否定为  
 A.  $\exists x_0 > 0, -x_0^2 + 2x_0 - 1 \leq 0$       B.  $\exists x_0 \leq 0, -x_0^2 + 2x_0 - 1 > 0$   
 C.  $\forall x > 0, -x^2 + 2x - 1 \leq 0$       D.  $\forall x < 0, -x^2 + 2x - 1 > 0$
3. 三名同学到五个社区参加社会实践活动, 要求每个社区有且只有一名同学, 每名同学至多去两个社区, 则不同的派法共有  
 A. 90 种      B. 180 种      C. 125 种      D. 243 种
4. 已知向量  $a = (2, 1)$ ,  $b = (x-1, x)$  ( $x > 1$ ), 且  $|b| = \sqrt{5}$ , 若  $(ma - b) \perp b$ , 则实数  $m$  的值为  
 A. 0      B. -1      C.  $\frac{4}{5}$       D.  $\frac{5}{4}$
5. 已知点  $P(4, 3)$  是角  $\alpha$  的终边上一点, 则  $\tan \frac{\alpha}{2} =$   
 A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\pm \frac{1}{3}$       C. 3 或  $\frac{1}{3}$       D. 3
6. 如图, 长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = BC = 2$ , 若直线  $AB_1$  与平面  $ACC_1A_1$  所成的角为  $30^\circ$ , 则直线  $BC_1$  与直线  $AC$  所成的角为  
 A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $90^\circ$



7. 若直线  $l: kx - y + 2 - k = 0$  与圆  $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$  交于  $A, B$  两点, 则当  $\triangle ABC$  周长最小时,  $k =$   
 A.  $\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C. 1      D. -1

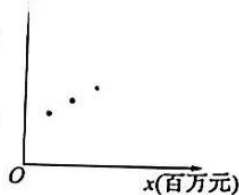
开学摸底联考 新高考卷 数学试卷 第 1 页 (共 4 页)

8. 已知  $a > 0$ , 若对任意的  $x > 0$ ,  $a \cdot e^{ax-1} \geq \frac{\ln x}{e}$  恒成立, 则实数  $a$  的最小值为

- A.  $e$                       B.  $\frac{1}{e}$                       C.  $e^2$                       D.  $\frac{1}{e^2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 某企业秉承“科学技术是第一生产力”的发展理念, 投入大量科研经费进行技术革新, 该企业统计了最近 6 年投入的年科研经费  $x$  (单位: 百万元) 和年利润  $y$  (单位: 百万元) 的数据, 并绘制成如图所示的散点图. 已知  $x, y$  的平均值分别为  $\bar{x} = 7, \bar{y} = 10$ . 甲统计员得到的回归方程为  $\hat{y} = 1.69x + \hat{a}$ ; 乙统计员得到的回归方程为  $\hat{y} = 2.52e^{0.17x}$ ; 若甲、乙二人计算均未出现错误, 则以下结论正确的为



- A. 当投入年科研经费为 20 (百万元) 时, 按乙统计员的回归方程可得年利润估计值为 75.6 (百万元) (取  $e^{3.4} = 30$ )
- B.  $\hat{a} = -1.83$
- C. 方程  $\hat{y} = 1.69x + \hat{a}$  比方程  $\hat{y} = 2.52e^{0.17x}$  拟合效果好
- D.  $y$  与  $x$  正相关
10. 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的偶函数  $f(x)$  的图象是连续不间断的曲线, 且  $f(x+2) + f(x) = f(1)$ , 对任意的  $x_1, x_2 \in [-2, 0], x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  恒成立, 则
- A.  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上单调递增
- B.  $f(x)$  是以 4 为周期的函数
- C.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 3$  对称
- D.  $f(x)$  在区间  $[-100, 100]$  上的零点个数为 100

11. 将函数  $f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  图象上所有点的横坐标变为原来的  $\frac{1}{2}$ , 再向左平移  $\varphi$  ( $\varphi > 0$ ) 个单位长度, 得到函数  $g(x)$  的图象, 若对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 均有  $g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{12}\right)$  成立, 则

- A.  $g(x)$  的最大值为 1
- B.  $\varphi$  的最小值为  $\frac{\pi}{12}$
- C.  $g(x)$  在  $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$  上单调递增
- D. 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 均有  $g(x) \geq g\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  成立
12. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 其一条渐近线为  $y = \sqrt{3}x$ . 直线  $l$  过点  $F_2$  且与双曲线  $C$  的右支交于  $A, B$  两点,  $M, N$  分别为  $\triangle AF_1F_2$  和  $\triangle BF_1F_2$  的内心, 则
- A. 直线  $l$  倾斜角的取值范围为  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$
- B. 点  $M$  与点  $N$  始终关于  $x$  轴对称
- C. 三角形  $MNF_2$  为直角三角形
- D. 三角形  $MNF_2$  面积的最小值为  $a^2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若  $z = \frac{1-ai}{2+i}$  ( $i$  为虚数单位) 为纯虚数，则实数  $a$  的值为 \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x)$  满足：①对  $\forall m, n > 0, f(m) + f(n) = f(mn)$ ；②  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ . 请写出一个符合上述两个条件的函数  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $S_{11} > S_{10} > S_{12}$ ，则满足  $S_n > 0$  的正整数  $n$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

16. 在三棱锥  $S-ABC$  中，底面  $\triangle ABC$  是边长为  $2\sqrt{3}$  的正三角形， $SA = AB$ ，点  $M$  为  $\triangle SAB$  的垂心，且  $CM \perp$  平面  $SAB$ ，则三棱锥  $S-ABC$  的外接球的体积为 \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在 ①  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ，②  $S_n = 2^{n+1} - n + 2$ ，③  $S_n = 2a_n - n + 4$  三个条件中任选一个，补充到下面问题的横线处，并解答.

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $a_1 = 1$ ，\_\_\_\_\_.

(1) 求  $a_n$ ；

(2) 设  $b_n = na_n$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

注：如果选择多个条件解答，按第一个解答计分.

18. (12 分) 已知  $a, b, c$  为  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边，向量  $m = (\sin B - \sin A, \sin C - \sin A)$ ， $n = (a + c, b)$ ，且  $m \parallel n$ .

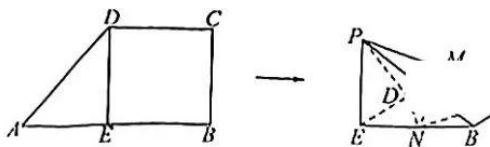
(1) 求角  $C$ ；

(2) 若  $b = 4$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $6\sqrt{3}$ ， $D$  为  $BC$  中点，求线段  $AD$  的长.

19. (12 分) 如图，梯形  $ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ， $BC = CD = 2$ ， $AD = \sqrt{5}$ ， $DE \perp AB$ ，垂足为点  $E$ ，将  $\triangle AED$  沿  $DE$  折起，使得点  $A$  到点  $P$  的位置，且  $PE \perp EB$ ，连接  $PB, PC, M, N$  分别为  $PC$  和  $EB$  的中点.

(1) 证明： $MN \parallel$  平面  $PED$ ；

(2) 求二面角  $D-MN-C$  的正弦值.



12.(12分)乒乓球是我国的国球,“乒乓精神”激励了一代又一代国人.为弘扬国球精神,传承乒乓球文化,强健学生体魄,某中学举行了乒乓球单打比赛.比赛采用7局4胜制,每局比赛为11分制,选手只要得到至少11分,并且领先对方至少2分(包括2分),即赢得该局比赛.在一局比赛中,每人只发2个球就要交换发球权,如果双方比分为10:10后,每一个球就要交换一个发球权.经过紧张的角逐,甲、乙两位选手进入了决赛.

(1)若甲赢得每局比赛的概率为 $\frac{2}{3}$ ,求甲以4:1赢得比赛的概率;

(2)若在某一局比赛中,双方战成10:10,且甲获得了第一球的发球权,若甲发球时甲赢1分的概率为 $\frac{3}{4}$ ,乙发球时甲赢1分的概率为 $\frac{1}{2}$ ,求两人打了 $\xi$ ( $\xi \leq 5, \xi \in \mathbb{N}$ )个球后,甲赢得了该局比赛的概率.

13.(12分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ( $a > b > 0$ )的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ,且经过点 $A(\sqrt{6}, \sqrt{15})$ .

(1)求椭圆 $C$ 的方程;

(2)若过点 $M(3, 0)$ 的直线 $l$ 与椭圆 $C$ 交于 $P, Q$ 两点,点 $P$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $N$ ,求 $\triangle MNQ$ 面积的最大值.

14.(12分)已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ .

(1)当 $a = 1$ 时,求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)证明:当 $a \leq 2$ 时, $f(x) > 1 - (\sin x + \cos x)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线