

2024 届NCS高三摸底测试 数 学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

一. 单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $P = \{x | y = \sqrt{x}\}$, $Q = \{y | y = 2^x\}$, 则
 A. $Q \subseteq P$ B. $P \subseteq Q$ C. $P = Q$ D. $Q \subseteq \mathbb{C}_R P$
2. 复数 $z = \frac{1}{3+4i}$ 的虚部是
 A. $-\frac{3}{25}$ B. $-\frac{3}{25}i$ C. $-\frac{4}{25}$ D. $-\frac{4}{25}i$
3. 已知向量 $\vec{a} = (2, m)$, $\vec{b} = (m+1, 1)$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $m =$
 A. $-\frac{2}{3}$ B. 1 C. 2 或 -1 D. 1 或 -2
4. 已知公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n - 2q^n$, 则 $a_1 =$
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4
5. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , P 是抛物线 C 在第一象限的一点, 过 P 作 C 的准线的垂线, 垂足为 M , FM 的中点为 N . 若直线 PN 经过点 $(0, -3)$, 则直线 PN 的斜率为
 A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3
6. 已知函数 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 的图象与直线 $y = 2 - x$ 交点的横坐标分别为 a, b , 则
 A. $a > b$ B. $a + b < 2$ C. $ab > 1$ D. $a^2 + b^2 > 2$
7. 已知函数 $f(x)$ 的值域为 A , 函数 $g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x)+1}$ 的值域为 B , 则“ $A = [-1, 1]$ ”是“ $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
8. 若函数 $f(x) = \cos x, a \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, 则函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, a]$ 上平均变化率的取值范围为
 A. $(-1, 0]$ B. $(-1, -\frac{2}{\pi}]$
 C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, -\frac{2}{\pi}]$

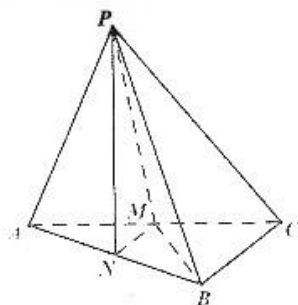
四. 解答题: 共 70 分. 17 题 10 分, 其余大题 12 分一道, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $C = \frac{\pi}{3}$, $a \cos B + b \cos A = abc$.

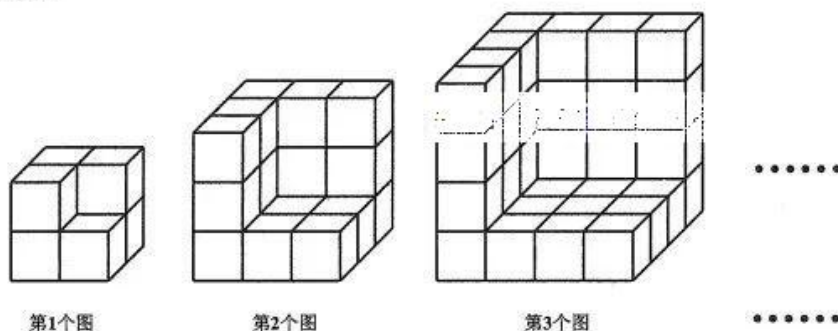
- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;
- (2) 若 $c = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, M, N 分别为 AC, AB 的中点, $PM \perp AB$.

- (1) 求证: $AB \perp PN$;
- (2) 若 $AB = BC = 2, BP = PM = 3$, 求二面角 $N-PM-B$ 的余弦值.



19. (12 分) 如图, 第 n 个图形是由棱长为 $n+1$ 的正方体挖去棱长为 n 的正方体得到的, 记其体积为 $\{a_n\}$.



- (1) 求证: $a_n = 3n^2 + 3n + 1$;
- (2) 求和: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $M(1, \frac{3}{2})$, F 为椭圆 C 的右焦点, O 为坐标原点, $\triangle OFM$ 的面积为 $\frac{3}{4}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 $P(4, 0)$ 作一条斜率不为 0 的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A 在 B, P 之间), 直线 BF 与椭圆 C 的另一个交点为 D , 求证: 点 A, D 关于 x 轴对称.

21. (12分) 迎“七一”党建知识竞赛, 竞赛有两关, 某学校代表队有四名队员, 这四名队员若有机会参加这两关比赛, 通过的概率见下表:

队员	第一关	第二关
甲	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
乙	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
丙	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
丁	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

比赛规则是: 从四名队员中随机选出两名队员分别参加比赛, 每个队员通过第一关可以得 60 分, 且有资格参加第二关比赛, 若没有通过, 得 0 分且没有资格参加第二关比赛, 若通过第二关可以再得 40 分, 若没有通过, 不得分. 两名参赛队员所得总分为该代表队的得分, 代表队得分不低于 160 分, 可以获得“党建优秀代表队”称号. 假设两名参赛队员不相互影响.

(1) 求这次比赛中, 该校获得“党建优秀代表队”称号的概率;

(2) 若这次比赛中, 选中了甲乙两名队员参赛, 记该代表队的得分为 X , 求随机变量 X 的分布列和期望.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = a^x (a > 1)$.

(1) 求函数 $g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调区间和极值;

(2) 若方程 $f(\frac{1}{x}) = 1 - x \log_a x$ 有两个不同的正根, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

