海南省 2022—2023 学年高三第一学期期末学业水平诊断

数学·答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查复数的基本运算.

解析 $\frac{3-i}{1-2i}=\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$.

2. 答案 A

命题意图 本题考查集合的表示、关系以及运算.

解析 集合 $B=\{x|1-\log_2 x<0\}=\{x|x>2\}$，则 $A\subseteq B$.

3. 答案 D

命题意图 本题考查数列的递推关系.

解析 $a_5+a_6=S_6-S_4=2^6-2^4=48$，$a_1=S_1=3$，所以$\frac{a_5+a_6}{a_1}=16$.

4. 答案 B

命题意图 本题考查对数模型的应用以及对数的运算性质.

解析 由已知得 $1.8+5\lg 50\approx 10.3$，则 $\lg 50=1+\lg 5\approx\frac{10.3-1.8}{5}=1.7$，所以 $\lg 5\approx 0.7$. 所以 $1.8+5\lg 200=1.8+5\lg\frac{1\,000}{5}=1.8+5(3-\lg 5)\approx 13.3$.

5. 答案 B

命题意图 本题考查奇函数的概念.

解析 由 $f(-x)=-f(x)$ 得 $\ln\frac{2-ax}{b-x}=-\ln\frac{2+ax}{b+x}$，所以$\frac{2-ax}{b-x}=\frac{b+x}{2+ax}$，整理可得 $b^2-x^2=4-a^2x^2$，于是 $a^2=1$，$b^2=4$. 经检验，(a,b) 为 $(1,-2)$，$(-1,2)$ 时满足条件，当 $a=1$，$b=2$ 时，$f(x)=\ln\frac{2+x}{2+x}$的定义域为 $\{x|x\neq-2\}$，不关于原点对称，当 $a=-1$，$b=-2$ 时，$f(x)=\ln\frac{2-x}{x-2}=\ln(-1)$，无意义.

6. 答案 C

命题意图 本题考查样本平均数与中位数的概念.

解析 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$，中位数为 m，则 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_n-1$ 的平均数为 $2\bar{x}-1$，中位数为 $2m-1$，所以 $2\bar{x}-1-(2m-1)=2(\bar{x}-m)=4$.

7. 答案 B

命题意图 本题考查抛物线的性质.

解析 由已知可得 $F(0,1)$，C 的准线为 $y=-1$，根据抛物线的定义，可知 P 的纵坐标为 1，Q 的纵坐标为 4，根据对称性，不妨令 P 在第二象限，Q 在第一象限，则 $P(-2,1)$，$Q(4,4)$. 由 $x^2=4y$ 得 $y=\frac{x^2}{4}$，得 $y'=\frac{x}{2}$，所以抛

物线在 P,Q 两点处的切线斜率分别为 -1 和 2，得到两条切线方程并联立 $\begin{cases} y=-x-1, \\ y=2x-4, \end{cases}$ 解得 $T(1,-2)$，所以 $|FT|=\sqrt{1^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$.

8. 答案　D

命题意图　本题考查简单几何体的体积与表面积计算.

解析　以前的药片表面积为 $4\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\pi$，体积为 $\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{2}=\frac{11}{96}\pi$. 设升级后的药片底面半径为 r，则 $2\pi r^2+2\pi r\times\frac{1}{2}=\pi$，得 $2r^2+r-1=0$，解得 $r=\frac{1}{2}$，升级后药片的体积为 $\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}$. 因为 $\frac{\pi}{8}-\frac{11\pi}{96}=\frac{\pi}{96}$，所以升级后体积增加了 $\frac{\pi}{96}\ \text{cm}^3$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 答案　AC

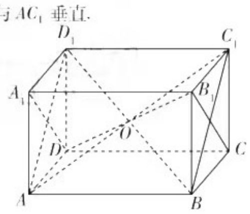
命题意图　本题考查同角关系及二倍角公式的应用.

解析　$\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$，因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{4}{3}$.

10. 答案　ABD

命题意图　本题考查空间直线与直线的位置关系.

解析　如图所示，因为 $AD=AA_1$，所以侧面 ADD_1A_1 是正方形，所以 $A_1D\perp AD_1$，又易得 $AB\perp A_1D$，故 $A_1D\perp$ 平面 ABC_1D_1，同理 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1D_1，故 A_1D 与 B_1C 都与 AC_1 垂直. 另一方面，$AD_1=\sqrt{2}AD=AB$，所以四边形 ABC_1D_1 为正方形，所以 $AC_1\perp BD_1$. 易知 AC_1，B_1D 交于长方体的中心 O，在 $\triangle OB_1C_1$ 中，计算可得 $OB_1=OC_1=B_1C_1$，故 $\angle B_1OC_1=60°$，所以 B_1D 不与 AC_1 垂直.



11. 答案　BCD

命题意图　本题考查圆的方程，直线与圆的位置关系.

解析　因为圆 C 经过坐标原点，所以 $a-2=0$，即 $a=2$，圆 C 的方程可化为 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$，所以圆 C 的半径为 $\sqrt{5}$，A 错误；直线 $x+3y+1=0$ 经过圆心 $(2,-1)$，所以圆 C 的一条直径在这条直线上，B 正确；在圆 C 的方程中令 $x=0$，得 $y=0$ 或 -2，令 $y=0$，得 $x=0$ 或 4，所以圆 C 与坐标轴的交点分别为 $(0,0)$，$(0,-2)$，$(4,0)$，三点构成的三角形面积为 $\frac{1}{2}\times2\times4=4$，C 正确；到 x 轴的距离为 1 的点的轨迹为两条直线 $y=\pm1$，已知这两条直线与圆 C 均有 2 个交点，故圆 C 上到 x 轴的距离为 1 的点有 4 个，D 正确.

12. 答案　BC

命题意图　本题考查复合函数的性质以及导数的应用.

解析 对于A，易知$g(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，$u'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=(e^{x^2-x}-1)(2x-1)$，当$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$x^2-x<0$，$e^{x^2-x}-1<0$，$2x-1>0$，所以$u'(x)<0$，即$u(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，故A错误.

对于B，$f'(x)=e^x-1$，可得$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(0)=1$. 而$v'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=[2f(x)-1]f'(x)$，因为$f(x)\geqslant 1$，所以$2f(x)-1>0$，所以$v'(x)$与$f'(x)$的正负相同，故$v(x)$与$f(x)$的单调区间相同，故B正确.

对于C，从上面的分析中得到$f(x)_{\min}=f(0)=1$，$g(0)=g(1)=0$，所以$u(x)_{\min}=f(g(0))=f(g(1))=1$，故C正确.

对于D，易知$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$，因为$f(x)_{\min}=f(0)=1$，而$g(x)$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，从而$v(x)_{\min}=g(f(0))=g(1)=0$，故D错误.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. **答案** 1

命题意图 本题考查平面向量的线性运算和数量积.

解析 以A为坐标原点，分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$的方向为$x$，$y$轴正方向建立平面直角坐标系，则$A(0,0)$，$B(2,0)$，$E(0,1)$，$F(1,2)$，则$\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=(1,1)\cdot(2,-1)=2-1=1$.

14. **答案** $\frac{5\pi}{6}$

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 令$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$得$x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，其中离$y$轴最近的对称轴为$x=\frac{5\pi}{6}$.

15. **答案** $\frac{4}{19}$

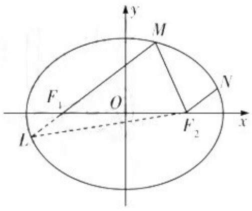
命题意图 本题考查条件概率以及全概率公式的应用.

解析 用A表示事件"小明步行上学"，B表示事件"小明骑自行车上学"，C表示事件"小明迟到". 由已知得$P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，$P(C|A)=0.05$，$P(C|B)=0.02$. 根据全概率公式可知$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)\cdot P(C|B)=0.6\times0.05+0.4\times0.02=0.038$，所以$P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(B)P(C|B)}{P(C)}=\frac{0.4\times0.02}{0.038}=\frac{4}{19}$.

16. **答案** $\frac{\sqrt{10}}{5}$

命题意图 本题考查椭圆的性质.

解析 设椭圆的半焦距为$c(c>0)$. 如图，延长MF_1，与椭圆交于点L，连接F_2L. 由$F_1M/\!/F_2N$，所以根据对称性可知，$|F_1L|=|F_2N|$，设$|F_2N|=|F_1L|=t$，则$|F_2M|=2t$，$|F_1M|=3t$，从而$2a=|F_2M|+|F_1M|=5t$，故$|F_2L|=4t$. 在$\triangle LMF_2$中，注意到$|F_2L|=4t=|ML|$，所以$\cos\angle LMF_2=\frac{|MF_2|}{2|ML|}=\frac{1}{4}$. 在$\triangle MF_1F_2$中，$4c^2=9t^2+4t^2-2\times3t\times2t\times\frac{1}{4}$，即$4c^2=10t^2$，所以$t=\frac{\sqrt{10}}{5}c$，所以$2a=\sqrt{10}c$，所以离心率$e=\frac{\sqrt{10}}{5}$.



四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查利用正弦定理、余弦定理解三角形.

解析 选择①②：

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$. ……（3 分）

因为 A 为钝角，所以 B 为锐角，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{13}{14}$. ……（5 分）

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$， ……（8 分）

所以 $\sin B+\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$. ……（10 分）

选择①③：

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc=49$. ……（2 分）

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以 $bc=3$， ……（4 分）

所以 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=52$，即 $b+c=2\sqrt{13}>7$. ……（6 分）

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，$\sin C=\frac{c\sin A}{a}$， ……（8 分）

所以 $\sin B+\sin C=\frac{\sin A}{a}(b+c)=\frac{\sqrt{3}}{14}\times 2\sqrt{13}=\frac{\sqrt{39}}{7}$. ……（10 分）

选择②③：

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{4}c=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以 $c=1$. ……（2 分）

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc=13$，所以 $a=\sqrt{13}$. ……（5 分）

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，$\sin C=\frac{c\sin A}{a}$， ……（7 分）

所以 $\sin B+\sin C=\frac{\sin A}{a}(b+c)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\times 4=\frac{2\sqrt{39}}{13}$. ……（10 分）

18. 命题意图 本题考查等差数列的性质，以及数列求和.

解析 （Ⅰ）设$\{a_n\}$的公差为 d， ……（1 分）

则 $a_{17}=3+16d$，$a_3=3+2d$， ……（3 分）

由 $a_{17}=5a_3$，得 $3+16d=5(3+2d)$，解得 $d=2$. …………（4分）

所以 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$. …………（6分）

（Ⅱ）$b_1=1$，$b_2=4$. …………（8分）

由 $a_n=2n+1\leqslant 3^m$，得 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$. …………（9分）

易知 3^m-1 为正偶数，所以 $\frac{3^m-1}{2}$ 为正整数，所以 $b_m=\frac{3^m-1}{2}$. …………（10分）

所以 $S_m=\frac{1}{2}(3+3^2+\cdots+3^m)-\frac{m}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3^{m+1}-3}{3-1}-\frac{m}{2}$ …………（11分）

$=\frac{3^{m+1}-3}{4}-\frac{m}{2}$. …………（12分）

19. **命题意图** 本题考查直线与平面垂直的证明以及二面角的计算.

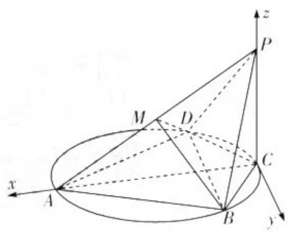
解析 （Ⅰ）因为 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PC\perp AB$. …………（1分）

因为点 B 在以 AC 为直径的圆上，所以 $AB\perp BC$. …………（2分）

又因为 $BC\cap PC=C$， …………（3分）

所以 $AB\perp$ 平面 PBC. …………（4分）

（Ⅱ）以 C 为坐标原点，CA，CP 所在直线为 x 轴，z 轴，以过 C 且平行于 DB 的直线为 y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. …………（5分）



解四边形 $ABCD$，可得 $BD=2\sqrt{3}$，$A(4,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(1,\sqrt{3},0)$，$D(1,-\sqrt{3},0)$， …………（6分）

由中点坐标公式可得 $M(2,0,1)$. 所以 $\overrightarrow{BM}=(1,-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{BD}=(0,-2\sqrt{3},0)$. …………（7分）

设平面 BMD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=-2\sqrt{3}y=0,\\ \overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=x-\sqrt{3}y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$. …………（9分）

由（Ⅰ）知 $\overrightarrow{BA}=(3,-\sqrt{3},0)$ 为平面 PBC 的一个法向量. …………（10分）

设平面 BMD 与平面 PBC 的夹角为 θ，则

$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}\right|=\frac{3}{\sqrt{2}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. …………（12分）

20. **命题意图** 本题考查概率计算以及随机变量的应用.

解析 （Ⅰ）由已知得 $2p+\frac{1}{4}+p=1$，所以 $p=\frac{1}{4}$. …………（2分）

如果王先生只投资产品 B，他一年后投资收益的期望值为

$10\times\left(0.16\times\frac{1}{2}+0-0.04\times\frac{1}{4}\right)=0.7$（万元）. ……（5 分）

（Ⅱ）产品 B 的平均收益率为 $0.16\times\frac{1}{2}+0-0.04\times\frac{1}{4}=0.07$. ……（6 分）

因为 $0.07<0.08$，$0.07+0.02>0.08$，即产品 B 的平均收益率比产品 A 的收益率小，但加上鼓励金后平均收益率比产品 A 的收益率大，故要使投资收益的期望值最大，应优先投资产品 B，使鼓励金达到 1 200 元，其余资金再投资产品 A. ……（8 分）

因为 $\frac{1\ 200}{0.02}=60\ 000$（元），所以应该用 6 万元投资产品 B，4 万元投资产品 A. ……（10 分）

一年后投资收益的期望值最大为 $4\times0.08+6\times0.07+0.12=0.86$（万元）. ……（12 分）

21. **命题意图** 本题考查双曲线的基本性质、双曲线与直线的关系.

解析 （Ⅰ）设 E 的焦距为 $2c$，由已知得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{4}$， ……（1 分）

又由 $a^2+b^2=c^2$，可得 $a=2b$. ……（2 分）

再由 $|BF|=\sqrt{c^2+b^2}=\sqrt{a^2+2b^2}=\sqrt{6}$， ……（3 分）

可得 $a=2$，$b=1$， ……（4 分）

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. ……（5 分）

（Ⅱ）设 l：$y=kx$，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(-x_1,-y_1)$，$M(x_2,y_2)$，由题意可知 $k>0$，$0<x_1<x_2$， ……（6 分）

由 $\triangle AQM$ 的面积是 $\triangle APM$ 面积的 2 倍，

可得 $|QM|=2|PM|$，从而 $x_2+x_1=2(x_2-x_1)$，即 $x_2=3x_1$. ……（7 分）

易知直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x-1$.

由方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x-1,\\ y=kx,\end{cases}$ 消去 y，可得 $x_2=\frac{2}{1-2k}$. ……（8 分）

由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1,\\ y=kx,\end{cases}$ 消去 y，可得 $x_1=\frac{2}{\sqrt{1-4k^2}}$. ……（9 分）

由 $x_2=3x_1$，可得 $\sqrt{1-4k^2}=3(1-2k)$，两边平方，整理得 $10k^2-9k+2=0$，

解得 $k=\frac{2}{5}$ 或 $k=\frac{1}{2}$. ……（10 分）

当 $k=\frac{1}{2}$ 时，l 与直线 AB 平行，不合题意，舍去； ……（11 分）

当 $k=\frac{2}{5}$ 时，$x_2=10$，$x_1=\frac{10}{3}$，符合题意.

所以 l 的斜率为 $\frac{2}{5}$. ……（12 分）

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）$f'(x)=e^x-\frac{e}{x}$，$x>0$， ……（1 分）

— 6 —

易知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(1)=0$，…………（2分）

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，…………（3分）

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，…………（4分）

$\therefore f(x)\geqslant f(1)=e$. …………（5分）

（Ⅱ）不等式 $2f(x)\geqslant 2ax-2e\ln x+x^2+a^2$ 恒成立，即 $2e^x-2ax-x^2-a^2\geqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立.

令 $g(x)=2e^x-2ax-x^2-a^2$，

则 $g'(x)=2e^x-2x-2a$，设 $\varphi(x)=g'(x)=2e^x-2x-2a$，则 $\varphi'(x)=2e^x-2$. …………（6分）

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)=2e^x-2>0$，$\therefore g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$g'(x)>g'(0)=2-2a=2(1-a)$. …………（7分）

①若 $1-a\geqslant 0$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $g(0)=2-a^2\geqslant 0$，$\therefore -\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore -\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 1$. …………（8分）

②若 $1-a<0$，则 $g'(0)<0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$g'(x)\to+\infty$，

$\therefore \exists x_0>0$，使得 $g'(x_0)=2e^{x_0}-2x_0-2a=0$，即 $a=e^{x_0}-x_0$. …………（9分）

当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x>x_0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $g(x)_{\min}=g(x_0)=2e^{x_0}-(x_0+a)^2=2e^{x_0}-(e^{x_0})^2=e^{x_0}(2-e^{x_0})\geqslant 0$，

$\therefore e^{x_0}\leqslant 2$，$\therefore 0<x_0\leqslant\ln 2$. …………（10分）

由 $a=e^{x_0}-x_0$，令函数 $h(x)=e^x-x$，当 $0<x\leqslant\ln 2$ 时，$h'(x)=e^x-1>0$，

$\therefore 1<h(x)\leqslant 2-\ln 2$，$\therefore 1<a\leqslant 2-\ln 2$. …………（11分）

综上，实数 a 的取值范围是 $[-\sqrt{2},2-\ln 2]$. …………（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。