2020~2021 学年安徽名校第一学期期末联考

理科数学

本试卷共 4 页，23 题（含选考题）。全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

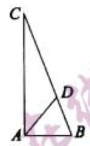
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x|2<x<3\}$　　B. $\{x|1<x<4\}$　　C. $\{x|3<x<4\}$　　D. $\{x|1\leqslant x<4\}$

2. 已知复数 z 满足 $z(2-\mathrm{i})=\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则 $z=$

A. $\dfrac{-1+2\mathrm{i}}{5}$　　B. $\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{5}$　　C. $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{5}$　　D. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{5}$



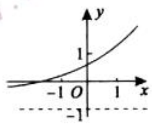
3. 如图，$AB=1$，$AC=3$，$\angle A=90°$，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. 1　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

4. 已知使不等式 $x^2+(a+1)x+a\leqslant 0$ 成立的任意一个 x，都满足不等式 $3x-1\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围为

A. $\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$

5. 已知函数 $y=a^x-b(a>0,a\neq 1)$ 的图象如图所示，则以下结论不正确的是



A. $a^b>1$　　B. $\ln(a+b)>0$

C. $2^{b-a}<1$　　D. $b^a>1$

6. 将函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(0<\omega<4)$ 的周期为 π，则以下说法正确的是

A. $\omega=1$

B. 函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{12}$

C. $f(\dfrac{\pi}{3})\geqslant f(x)$

D. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

7. 李克强总理提出，要在960万平方公里土地上掀起"大众创业"、"草根创业"的新浪潮，形成"万众创新"、"人人创新"的新势态. 为响应国家鼓励青年创业的号召，小王开了两家店铺，每个店铺招收了两名员工. 若某节假日每位员工的休假概率均为$\frac{1}{3}$，且是否休假互不影响，若一家店铺的员工全部休假，而另一家无人休假，则调剂1人到该店铺，使得该店铺能够正常营业，否则该店就停业. 则两家店铺该节假日能正常开业的概率为

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{5}{9}$　　D. $\frac{8}{9}$

8. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，点D在边AC上，已知$A=\frac{\pi}{3}$，$AD=5$，$BD=7$，$c\sin B=b\cos\frac{C}{2}$，则$BC=$

A. 8　　B. 10　　C. $8\sqrt{3}$　　D. $10\sqrt{3}$

9. 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，首项$a_1>0$，则"$q>1$"是"对$\forall n\in N^*$，$a_{2n+1}-a_{2n}>0$"的

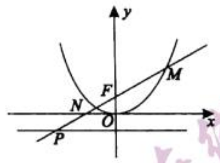
A. 充要条件　　B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知E,F,G分别为CD,D_1D,A_1B_1的中点，P为平面CDD_1C_1内任一点，设异面直线GF与PE所成的角为α，则$\cos\alpha$的最大值为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. 1

11. 设抛物线$C:x^2=4y(p>0)$的焦点为F，准线为l，过点F的直线交抛物线C于M,N两点，交l于点P，且$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{FM}$，则$|MN|=$



A. 2　　B. $\frac{8}{3}$　　C. 5　　D. $\frac{16}{3}$

12. 已知函数$f(x)=\sum_{i=0}^{2}\left|x-2i+\frac{1}{x-2i}\right|$，下列四个判断一定正确的是

A. 函数$f(x)$为偶函数

B. 函数$f(x)$最小值为6

C. 函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=2$对称

D. 关于x的方程$[f(x)]^2-m=0(m>0)$的解集可能为$\{-2,0,3,6\}$

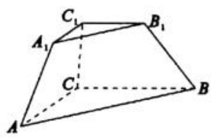
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 设x,y满足$\begin{cases}2x+y\leqslant 4\\x-y\geqslant -1\\x+2y\leqslant 2\end{cases}$，则$z=x+y$的最大值为__________.

14. 已知$\alpha\in(0,\pi)$，且$2\cos2\alpha+\cos\alpha-1=0$，则$\sin\alpha=$__________.

15. 已知点$F(\sqrt{5},0)$为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点，$O$为坐标原点，以点$F$为圆心，2为半径的圆与双曲线$C$的一条渐近线交于$M,N$两点，若$\triangle MNF$为等边三角形，则该双曲线的离心率为__________.

16. 如图，在三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，$A_1B_1=CC_1=2\sqrt{2}$，平面$AA_1B_1B\perp$平面ABC，则该三棱台外接球的表面积为__________.



三. 解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

从① $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，② $\{b_n\}$ 为等差数列且 $b_2=2,2b_1+b_5=7$，这两个条件中选择一个条件补充到问题中，并完成解答.

问题：已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_n=2^{b_n}$，且________.

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；

(2) 若 c_m 表示数列 $\{b_n\}$ 在区间 $(0,a_m)$ 内的项数，求数列 $\{c_m\}$ 前 m 项的和 T_m.

18. (12 分)

随着新冠疫情防控进入常态化，人们的生产生活逐步步入正轨. 为拉动消费，某市发行 2 亿元消费券. 为了解该消费券使用人群的年龄结构情况，该市随机抽取了 50 人，对是否使用过消费券的情况进行调查，结果如下表所示，其中年龄低于 45 岁的人数占总人数的 $\dfrac{3}{5}$.

年龄(单位：岁)	$[15,25)$	$[25,35)$	$[35,45)$	$[45,55)$	$[55,65)$	$[65,75)$
调查人数	5	m	15	10	n	5
使用消费券人数	5	10	12	7	2	1

(1) 若以"年龄 45 岁为分界点"，由以上统计数据完成下面 2×2 列联表，并判断是否有 99% 的把握认为是否使用消费券与人的年龄有关.

	年龄低于 45 岁的人数	年龄不低于 45 岁的人数	合计
使用消费券人数			
未使用消费券人数			
合计			

参考数据：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

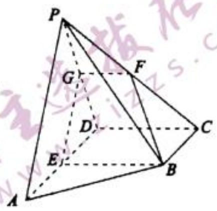
(2) 从使用消费券且年龄在 $[15,25)$ 与 $[25,35)$ 的人中按分层抽样方法抽取 6 人，再从这 6 人中选取 2 名，记抽取的两人中年龄在 $[15,25)$ 的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望.

19. (12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$BC//AD$，$\angle ADC=90°$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$，E 为线段 AD 的中点，过 BE 的平面与线段 PD，PC 分别交于点 G，F.

(1) 求证：$GF\perp$ 平面 PAD；

(2) 若 $PA=PD=\sqrt{2}$，点 G 为 PD 的中点，求平面 PAB 与平面 $BEGF$ 所成锐二面角的余弦值.



20. (12 分)

已知函数 $f(x)=x^2+2mx-2\ln x+m(m,n\in\mathbf{R})$.

(1) 若直线 $y=2mx$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 m 的值；

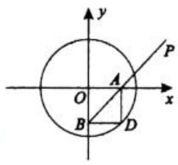
(2) 若函数 $g(x)=f(x)+4\ln x$ 有两个不同的极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，求 $\frac{g(x_2)+x_1}{x_1}$ 的取值范围.

21. (12 分)

已知 D 为圆 $O:x^2+y^2=1$ 上一动点，过点 D 分别作 x 轴，y 轴的垂线，垂足分别为 A，B，连接 BA 延长至点 P，使得 $|PA|=2$，点 P 的轨迹记为曲线 C.

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 作圆 O 的切线交曲线 C 于 M，N 两点，Q 为曲线 C 上一动点(点 O，Q 分别位于直线 MN 两侧)，求四边形 $OMQN$ 的面积的最大值.



(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (10 分) **选修 4-4：坐标系与参数方程**

已知直线 $l:\begin{cases}x=2+t\cos\frac{3\pi}{4}\\ y=t\sin\frac{3\pi}{4}\end{cases}$ (t 为参数)，曲线 $C:(x-2)^2+y^2=4$. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程；

(2) 若射线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 分别交直线 l 和曲线 C 于 M、N 两点(N 点不同于坐标原点 O)，求 $|MN|$.

23. (10 分) **选修 4-5：不等式选讲**

已知 $a>0$，$b>0$，若函数 $f(x)=|x+a|+|x-b|$ 的最小值为 4.

(1) 求 $a+b$ 的值；

(2) 若 $a=1$，解关于 x 的不等式 $f(x)<5$.

2020-2021 学年安徽名校第一学期期末联考

高三理科数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	B	D	C	D	A	B	C	D	C

1.【解析】由题意可知 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，利用数轴可得，$A\cup B=\{x|1<x<4\}$.

2.【解析】因为 $z(2-i)=i$，所以 $z=\frac{i}{2-i}=\frac{-1+2i}{5}$.

3.【解析】由 $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{BC}=\overline{AB}+\frac{1}{3}(\overline{AC}-\overline{AB})=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$，所以 $\overline{AD}\cdot\overline{AB}=(\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC})\cdot\overline{AB}=\frac{2}{3}\overline{AB}^2+\frac{1}{3}\overline{AC}\cdot\overline{AB}=\frac{2}{3}\times1^2+\frac{1}{3}|\overline{AC}||\overline{AB}|\cos90^\circ=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times3\times0=\frac{2}{3}$.

4.【解析】由题意，$3x-1\le0$，得 $x\le\frac{1}{3}$，由 $x^2+(a+1)x+a\le0$，得 $(x+1)(x+a)\le0$，使不等式成立 $x^2+(a+1)x+a\le0$ 的任意一个 x，都满足不等式 $3x-1\le0$，则需 $-a\le\frac{1}{3}$，即 $a\ge-\frac{1}{3}$.

5.【解析】由图像可得 $a>1,0<b<1$，所以可得 $b-a<0$，$2^{b-a}<1$，经验证，除 D 不正确，其余均正确.

6.【解析】函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(0<\omega<4)$ 的周期为 π，所以 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，可以判断 $f(\frac{\pi}{3})$ 为最大值所以 C 正确，其余均不正确.

7.【解析】设两家店铺都不能正常营业为事件 A,若有四人休假概率为 $(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$，有三个人休假的概率为 $C_4^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})=\frac{8}{81}$,所以两家店铺都不能正常营业的概率为 $P(A)=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}$,所以两家店铺该节假日能正常开业的概率为 $1-P(A)=\frac{8}{9}$.

8.【解析】如图，在 $\triangle ABD$ 中，$A=\frac{\pi}{3}$，$AD=5$，$BD=7$，由余弦定理可得，

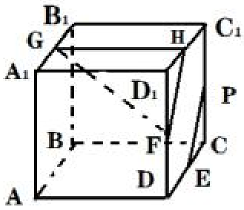
$BD^2=AD^2+AB^2-2AB\cdot AD\cos\frac{\pi}{3}$，得 $AB=8$，因为 $c\sin B=b\cos\frac{C}{2}$，由正弦定理得

$\sin C\sin B=\sin B\cos\frac{C}{2}$,得 $\sin C=\cos\frac{C}{2}$,得 $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}$，得 $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，

$C=\frac{\pi}{3}$,所以三角形 $\triangle ABC$ 为等边三角形，即 BC=8.

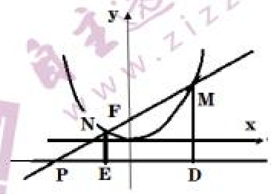
9.【解析】由 $a_{2n+1}-a_{2n}>0$，得 $a_1q^{2n}-a_1q^{2n-1}=a_1q^{2n-1}(q-1)>0$，因为 $a_1>0$，即为 $q^{2n-1}(q-1)>0$，即 $q(q-1)>0$，得 $q<0$ 或 $q>1$，所以"$q>1$"是"$q<0$ 或 $q>1$"的充分不必要条件.

10.【解析】若 $\cos\alpha$ 取得最大值，则 α 取得最小值，因为 P 为平面 CDD_1C_1 内任一点，由直线与平面所成角的定义可知，直线 GF 与平面 CDD_1C_1 所成的角为直线 GF 与平面 CDD_1C_1 内的所有直线所成角的最小角，如图所示，H 为 D_1C_1 中点，可知 HF 即为 GF 再平面 CDD_1C_1 内的射影，设正方体的边长为 2，



则可得 $HF=\sqrt{2}$，$GH=2$,所以 $GF=\sqrt{6}$，从而得到 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.【解析】如图，过点 M 做 MD 垂直于准线 l,由抛物线定义得 MF=MD,因为 $\overline{PF}=\overline{FM}$，所以 PM=2MD, 所以 $\angle DPM=30^\circ$，则直线 MN 方程为 $x=\sqrt{3}(y-1)$，联立 $\begin{cases}x=\sqrt{3}(y-1),\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 x 得，$3y^2-10y+3=0$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，所以 $y_1+y_2=\frac{10}{3}$, $y_1y_2=1$，得 $|MN|=y_1+y_2+2=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}$.



12.【解析】因为 $f(-x)=\sum_{i=0}^{2}\left|-x-2i+\frac{1}{-x-2i}\right|=\sum_{i=0}^{2}\left|x+2i+\frac{1}{x+2i}\right|$，$f(x)=f(-x)$ 不恒成立，故 A 不正确；$f(x)=\sum_{i=0}^{2}\left|x-2i+\frac{1}{x-2i}\right|=\left|x+\frac{1}{x}\right|+\left|x-2+\frac{1}{x-2}\right|+\left|x-4+\frac{1}{x-4}\right|$，$\left|x+\frac{1}{x}\right|\ge 2,\left|x-2+\frac{1}{x-2}\right|\ge 2,\left|x-4+\frac{1}{x-4}\right|\ge 2$，但等号不能同时取得，所以 $f(x)>6$，$f(4-x)=\sum_{i=0}^{n}\left|4-x-2i+\frac{1}{4-x-2i}\right|=\sum_{i=0}^{2}\left|x-4+2i+\frac{1}{x-4+2i}\right|=f(x)$，

所以 C 正确，函数图像关于 $x=2$ 对称，故若有根必关于 $x=2$ 对称，所以 D 不正确.

13.【答案】2【解析】由约束条件可得，当 $x=2,y=0$ 时，$z=x+y$ 取得最大值为 2.

14.【答案】$\frac{\sqrt{7}}{4}$【解析】因为 $2\cos2\alpha+\cos\alpha-1=0$，得 $4\cos^2\alpha+\cos\alpha-3=0$，

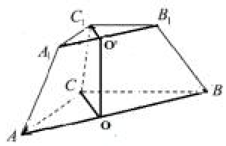
解得 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ 或 $\cos\alpha=-1$（舍去），又 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

15.【答案】$\frac{\sqrt{10}}{2}$【解析】因为以点 F 为圆心，以 2 为半径的圆与双曲线的一条渐近线的交点为 M,N，

且△MNF 为等边三角形，圆 F 与渐近线相交所得弦长 $|MN|=2$，因为焦点 F 到渐近线的距离为 b，

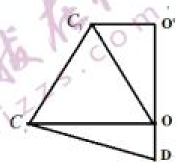
所以 $b=\sqrt{3}$，而 $c=\sqrt{5}$，所以 $a^2=c^2-b^2=1$，得 $a=\sqrt{2}$，所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

16.【答案】32π【解析】如图，取 AB 与 A_1B_1 中点 O,O'，连接 $CO,OO',C'O'$，



则可得 $CO=2\sqrt{2},C'O'=\sqrt{2}$，所以在直角梯形 $C'O'OC$ 中可求得 $O'O=\sqrt{6}$，由题意可知，该三棱台外接球的外接球的球心必在直线 $O'O$ 上，

设球的半径为 R，球心为 D，则 $(O'D-O'O)^2+OC^2=O'D^2+O'C^2$，得 $O'D=\sqrt{6}$，所以球心恰好为点 O，所以求的半径为 $2\sqrt{2}$，所以该三棱台外接球的表面积为 $4\pi(2\sqrt{2})^2=32\pi$.



17.【解析】(1) 选择①，因为 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\in N^*)$，

当 $n=1$ 时，$b_1=1$，…………………………………………………………………………1 分

当 $n\geq2$ 时，$b_n=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n$，$n=1$ 时也成立，故 $b_n=n$，……………………………3 分

所以 $a_n=2^n$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$，…………………………………………………………5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列. ……………………………………………6 分

若选择②，设数列 $\{b_n\}$ 公差为 d，

由题意 $\begin{cases} b_1+d=2, \\ 2b_1+b_1+4d=7, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} b_1=1, \\ d=1, \end{cases}$ 得 $b_n=n$， ……………………………………3 分

即 $\log_2 a_n=n$，得 $a_n=2^n$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}=2$. ……………………………………5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列. ……………………………………6 分

（2）若选择条件①，则 $a_n=2^n$， ……………………………………7 分

所以 c_1 对应的区间为 $(0,2)$，则 $c_1=1$；c_2 对应的区间为 $(0,4)$，则 $c_2=3$；

c_3 对应的区间为 $(0,8)$，则 $c_3=7$；……；c_m 对应的区间为 $(0,2^m)$，则 $c_m=2^m-1$；……………10 分

所以 $T_m=2^1-1+2^2-1+\cdots 2^m-1=\dfrac{2(1-2^m)}{1-2}-m=2^{m+1}-2-m$. ……………………………12 分

若选择条件②，则 $a_n=2^n$， ……………………………………7 分

所以 c_1 对应的区间为 $(0,2)$，则 $c_1=1$；c_2 对应的区间为 $(0,4)$，则 $c_2=3$；

c_3 对应的区间为 $(0,8)$，则 $c_3=7$；……；c_m 对应的区间为 $(0,2^m)$，则 $c_m=2^m-1$；……………10 分

所以 $T_m=2^1-1+2^2-1+\cdots 2^m-1=\dfrac{2(1-2^m)}{1-2}-m=2^{m+1}-2-m$. ……………………………12 分

18.【解析】（1）由题意得 $\begin{cases} 5+m+15+10+n+5=50, \\ \dfrac{5+m+15}{50}=\dfrac{3}{5}, \end{cases}$ 解得 $m=10$，$n=5$； ……………………1 分

由以上统计数据填写下面 2×2 列联表，如下

	年龄低于 45 岁的人数	年龄不低于 45 岁的人数	合计
使用消费券人数	27	10	37
未使用消费券人数	3	10	13
合计	30	20	50

……………………………………………………………………3 分

根据公式计算 $K^2=\dfrac{50(10\times27-10\times3)^2}{37\times13\times30\times20}\approx9.98>6.635$， ……………………………5 分

所以有 99%的把握认为是否使用消费券与人的年龄有关； ……………………………6 分

（2）由题意知抽取的 6 人中年龄在 $[15,25)$ 的有 2 人，年龄在 $[25,35)$ 的有 4 人，

所以 X 的可能取值为 0，1，2. ……………………………………………………………7 分

且 $P(X=0)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}, P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}, P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

……………………………………………………………………………………………10 分

$E(X)=0\times\dfrac{2}{5}+1\times\dfrac{8}{15}+2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{2}{3}$.……………………………………………………12 分

19.【解析】证明：（1）因为 $BC=\dfrac{1}{2}AD$，且 E 为线段 AD 的中点，

所以 $BC=DE$，又因为 $BC /\!/ AD$，所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形，所以 $BE /\!/ CD$，………………2 分

又因为 $CD\subset$ 平面 PCD, $BE\not\subset$ 平面 PCD，

所以 $BE /\!/$ 平面 PCD，又平面 $BEGF\cap$ 平面 PCD=GF,所以 $BE /\!/ GF$，………………………………4 分

又 $BE\perp AD$,且平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $BE\perp$ 平面 PAD，所以 $GF\perp$ 平面 PAD，………………………………6 分

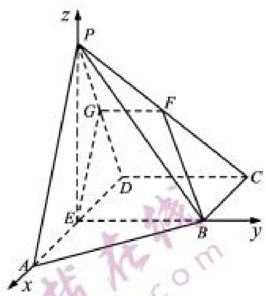
（2）因为 $PA=PD$， E 为线段 AD 的中点，

所以 $PE\perp AD$，又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，……………………………………………………7 分

以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EA}$ 的方向为 x 轴正方向建立如图

所示的空间直角坐标系 $E-xyz$；



则 $P(0,0,1)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $E(0,0,0)$, $D(-1,0,0)$, $G(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2})$,

则 $\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$, $\overrightarrow{PB}=(0,1,-1)$, $\overrightarrow{BE}=(0,-1,0)$, $\overrightarrow{DP}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{EG}=(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2})$ ……………………9 分

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1-z_1=0,\\ y_1-z_1=0.\end{cases}$

不妨令 $x_1=1$，可得 $\vec{n}=(1,1,1)$ 为平面 $BEGF$ 的一个法向量，

设平面 $BEGF$ 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{EG}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$，即 $\begin{cases}y_2=0,\\ -\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}z_2=0.\end{cases}$ 不妨令 $x_2=1$，可得 $\vec{n}=(1,0,1)$ 为平面 $BEGF$ 的一个法向量，……10 分

设平面 PAB 与平面 $BEGF$ 所成的锐二面角为 α，

于是有 $\cos\alpha=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；……………………………………………………11 分

所以平面 PAB 与平面 $BEGF$ 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………………12 分

20.【解析】(1) 由题意知 $x\in(0,+\infty)$，……1 分

$f'(x)=2x+2m-\dfrac{2}{x}$，……2 分

设直线 $y=2mx$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 (x_0,y_0)，所以 $\begin{cases} f'(x_0)=2m, \\ y_0=f(x_0), \\ y_0=2mx_0. \end{cases}$ ……3 分

整理得 $x_0^2=1$，得 $x_0=1$，$m=-1$；……4 分

(2) $g(x)=x^2+2mx+2\ln x+m$，所以 $g'(x)=2x+2m+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2+mx+1)}{x}$，……6 分

所以 x_1,x_2 是方程 $x^2+mx+1=0$ 的两个根，

所以 $x_1+x_2=-m,x_1x_2=1$，$m=-(x_2+\dfrac{1}{x_2})$，……8 分

易得 $x_2>1$，所以 $\dfrac{g(x_2)+x_1}{x_1}=\dfrac{x_2^2+2mx_2+2\ln x_2+m+x_1}{\dfrac{1}{x_2}}$

$=-x_2^3-x_2^2-2x_2+2x_2\ln x_2(x_2>1)$，……9 分

令 $h(x_2)=-x_2^3-x_2^2-2x_2+2x_2\ln x_2(x_2>1)$，$h'(x_2)=-3x_2^2+2(\ln x_2-x_2)$，……10 分

易证明 $\ln x_2<x_2$，所以 $h'(x_2)<0$，$h(x_2)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递减，

$h(x_2)<h(1)=-4$，从而 $\dfrac{g(x_2)+x_1}{x_1}$ 的取值范围为 $(-\infty,-4)$．……12 分

21.【解析】(1)设 $P(x,y)$，$D(x_0,y_0)$，则 $A(x_0,0)$，$B(0,y_0)$，

由题意知 $|AB|=1$，所以 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AB}$，得 $(x_0-x,-y)=2(-x_0,y_0)$，所以 $\begin{cases} x_0=\dfrac{x}{3}, \\ y_0=-\dfrac{y}{2}, \end{cases}$

因为 $x_0^2+y_0^2=1$，得 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$；……4 分

(2) (i) 当 MN 斜率存在时，设 MN 与圆 O 的切线为 $y=kx+n$，

要使四边形 $OMQN$ 的面积最大，则 Q 到 MN 距离要最大，此时过 Q 点 MN 的平行线必与椭圆 C 相切，

设为 $y=kx+m$，易得 Q 到 MN 距离与 O 到 MN 距离之和等于 O 到直线 $y=kx+m$ 的距离，设 O 到直线 $y=kx+m$ 的距离记为 d，则 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，……5 分

联立 $\begin{cases} y=kx+n, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(9k^2+4)x^2+18knx+9(n^2-4)=0$，

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，$x_1+x_2=-\dfrac{18kn}{9k^2+4}$，$x_1x_2=\dfrac{9(n^2-4)}{9k^2+4}$，

所以 $|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\dfrac{12\sqrt{1+k^2}\sqrt{9k^2+4-n^2}}{9k^2+4}$，……7 分

因为 $y=kx+n$ 与圆 O 相切，所以 $\dfrac{|n|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，因为 $y=kx+m$ 与椭圆相切，所以 $9k^2+4=m^2$，

$$S_{四边形OMQN}=S_{\triangle OMN}+S_{\triangle QMN}=\frac{1}{2}|MN|\times d=\frac{1}{2}\times\frac{12\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{9k^2+4-n^2}}{9k^2+4}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$=6\sqrt{\frac{9k^2+4-n^2}{9k^2+4}}=6\sqrt{\frac{8k^2+3}{9k^2+4}}=6\sqrt{\frac{8+\frac{3}{k^2}}{9+\frac{4}{k^2}}}$$，……9 分

可得 $S_{四边形OMQN}$ 随 k 的增大而增大，即 $S_{四边形OMQN}<4\sqrt{2}$.……10 分

（ii）当 MN 斜率不存在时，不妨取 $M(1,\dfrac{4\sqrt{2}}{3}),N(1,-\dfrac{4\sqrt{2}}{3})$，此时 $Q(3,0)$，

$S_{四边形OMQN}=4\sqrt{2}$.综上所得四边形 $OMQN$ 的面积的最大值为 $4\sqrt{2}$.……12 分

22.【解析】（1）由直线 l 的参数方程可得直角坐标方程为 $x+y=2$，……1 分

代入 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，得直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta+\cos\theta)=2$，

即 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，……3 分

将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入 $(x-2)^2+y^2=4$，

得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$；……5 分

（2）由已知可设 $M(\rho_1,\dfrac{\pi}{4}),N(\rho_2,\dfrac{\pi}{4})$，

则 $\rho_1=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$，$\rho_2=4\cos\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$，……8 分

$|MN|=|\rho_2-\rho_1|=\sqrt{2}$，……10 分

23.【解析】（1）因为 $f(x)=|x+a|+|x-b|\geq|(x+a)-(x-b)|=|a+b|=a+b$，…3 分

当且仅当 $-a\leq x\leq b$ 时等号成立，$f(x)$ 的最小值为 $a+b$，所以 $a+b=4$；……5 分

（2）由（1）知 $a+b=4$ 且 $a=1$，得 $b=3$，……6 分

所以 $|x+1|+|x-3|<5$，

当 $x<-1$ 时，得 $-x-1-x+3<5$，即 $x>-\frac{3}{2}$，所以 $-\frac{3}{2}<x<-1$；……7 分

当 $-1\leq x\leq 3$ 时，得 $x+1-x+3<5$，即 $4<5$，所以 $-1\leq x\leq 3$；……8 分

当 $x>3$ 时，得 $x+1+x-3<5$，即 $x<\frac{7}{2}$，所以 $3<x<\frac{7}{2}$；……9 分

综上所述，不等式 $f(x)<5$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}\right.\right\}$.……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》