

2023 届宁德市普通高中毕业班五月份质量检查

数学试题参考答案及评分标准

说明:

1.本解答指出了每题要考察的主要知识和能力,给出一种或几种解法供参考.如果考生的解法与给出的解法不同,可根据试题的主要考察内容比照评分标准确定相应的评分细则.

2.对解答题,当考生的解答在某一步出现错误,但整体解决方案可行且后续步骤没有出现推理或计算错误,则错误部分依细则扣分,并根据对后续步骤影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过后续部分正确解答应给分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

3.解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4.解答题只给整数分数,填空题不给中间分.

一、选择题: 本题考查基础知识和基本运算, 每小题 5 分, 满分 40 分.

1. D 2. C 3. B 4. B 5. C 6. D 7. A 8. B

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. ABD 10. BC 11. ACD 12. AD

三、填空题: 本题考查基础知识和基本运算, 每小题 5 分, 满分 20 分.

13. 5 14. $f(x) = -x^2$ (答案不唯一: 如 $f(x) = x + 1 - e^x$, $f(x) = \cos x - 1$ 等)

15. -1 16. 8

三、解答题: 本大题共 6 小题, 满分 70 分, 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

17. 本小题主要考查等差数列的通项公式、求和等基础知识, 考查运算求解能力, 逻辑推理能力, 化归与转化思想等. 满分 10 分.

解: (1) 由 $b_n = a_n + n^2$ 得 $b_1 = a_1 + 1$, $b_2 = a_2 + 4$, 1 分

代入 $a_1 + b_1 = 3$, $a_2 + b_2 = 8$ 得 $2a_1 + 1 = 3$, $2a_2 + 4 = 8$,

解得 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 3 分

分

又因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故公差为 $d = a_2 - a_1 = 1$, 4 分

因此 $a_n = n$, $b_n = n + n^2$ 5 分

(2) 证明: 由 (1) 可得 $b_n = n + n^2$,

所以 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n + n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$, 7 分

所以 $S_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_n}$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \dots \dots \dots 8 \text{ 分}$$

又因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ($n=1$ 时等号成立),

所以 $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, 即 $\frac{1}{2} \leq S_n < 1$10分

18. 本小题主要考查空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系, 空间角的计算等基础知识, 考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力, 考查化归与转化思想等. 满分12分.

解法一: (1) 取 AB 的中点 F , 连结 BD , DF .

在四边形 $ABCD$ 中, $BC \perp CD$, $AB \parallel CD$, 故四边形 $ABCD$ 为直角梯形,

又 $AB = 2BC = 2CD = 2$, 故 $AF = BF = \frac{1}{2}AB = 1$, $BD = \sqrt{2}$.

又由 $CD \parallel BF$, $CD = BF$, 所以四边形 $BCDF$ 为正方形,

故 $DF = 1 = \frac{1}{2}AB$,

从而 $BD \perp AD$;2分

又 $PD = 1$, $PB = \sqrt{3}$,

所以 $PD^2 + BD^2 = PB^2$, 故 $BD \perp PD$ 3分

由 $PD \cap AD = D$, $PD \subset$ 平面 PAD , $AD \subset$ 平面 PAD ,

从而 $BD \perp$ 平面 PAD ,4分

又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$5分

(2) 取 AD 的中点 O , 连接 OP , OF ,

由 $PA = PD = 1$, 所以 $PO \perp AD$,

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$6分

又 O, F 为 AD, AB 的中点,

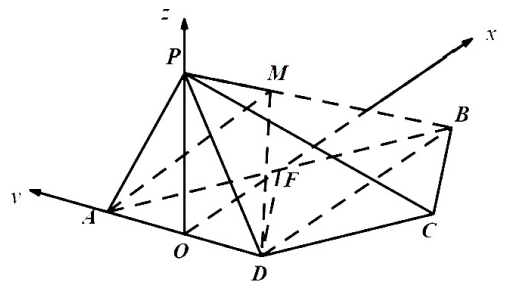
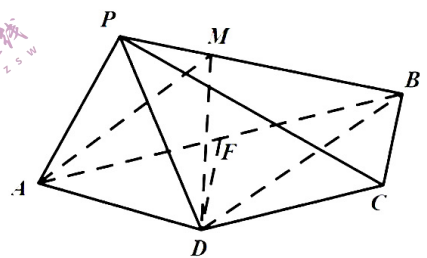
所以 $OF \parallel BD$, 且 $OF = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 (1) 知 $BD \perp AD$, 故 $OF \perp AD$.

以 O 为原点, OF, OA, OP 所在的直线分别为 x

y, z 轴, 建立如图的空间直角坐标系,

则 $O(0,0,0)$, $A\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $P\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, ...7分



则 $\overline{AD} = (0, -\sqrt{2}, 0)$, $\overline{PB} = \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overline{AP} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

设 $\frac{PM}{PB} = \lambda$, $\lambda \in (0, 1)$, 则 $\overline{PM} = \lambda \overline{PB} = \left(\sqrt{2}\lambda, -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda, -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$,

$\overline{AM} = \overline{AP} + \overline{PM} = \left(\sqrt{2}\lambda, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$,

平面 PAD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$, 8 分

设平面 ADM 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overline{AD} \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{2}y = 0, \\ \overline{AM} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{2}\lambda x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+1)y + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\lambda)z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 2\lambda$, 则 $\mathbf{n} = (\lambda-1, 0, 2\lambda)$, 10 分

因为二面角 $P-AD-M$ 的大小为 45° , 所以

$$|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{|\lambda-1|}{\sqrt{(\lambda-1)^2 + (2\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由 $\lambda \in [0, 1]$, 解得: $\lambda = \frac{1}{3}$,

所以线段 PB 上存在点 M , 当 $\frac{PM}{PB} = \frac{1}{3}$ 时, 使得二面角 $P-AD-M$ 大小为 45° 12 分

解法二: (1) 取 AD 的中点 O , AB 的中点 F , 连结 PO , BO , DF .

在四边形 $ABCD$ 中, $BC \perp CD$, $AB \parallel CD$, 故四边形 $ABCD$ 为直角梯形,

又 $AB = 2BC = 2CD = 2$,

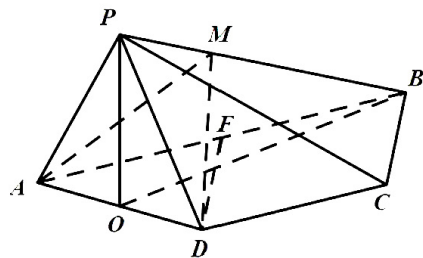
故 $CD \parallel BF$, 且 $CD = BF = BC = 1$,

所以四边形 $BCDF$ 为正方形,

故 $\triangle ADF$ 为等腰直角三角形,

从而 $AD = \sqrt{2}$, $\angle BAD = 45^\circ$,

$\triangle PAD$ 为等腰直角三角形 1 分



在 $\triangle ABO$ 中, $BO^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 \times \cos 45^\circ = \frac{5}{2}$,

又因为 $PA = PD = 1$, 所以 $PO \perp AD$,

$$PO = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 又 } PB = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } PB^2 = PO^2 + BO^2,$$

故 $PO \perp OB$, 3 分

由 $AO \cap BO = O$, $AO \subset \text{平面 } ABCD$, $OB \subset \text{平面 } ABCD$,

从而 $PO \perp \text{平面 } ABCD$, 4 分

又 $PO \subset \text{平面 } PAD$,

所以平面 $PAD \perp \text{平面 } ABCD$ 5 分

(2) 过 B 作 $Bz \parallel PO$, 则 $Bz \perp \text{平面 } ABCD$ 6 分

以 B 为原点, BA 、 BC 、 Bz 所在的直线分别为 x 、 y 、 z 轴, 建立如图的空间直角坐标系,

$$\text{则 } B(0,0,0), A(2,0,0), C(0,1,0), D(1,1,0), P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\text{设 } \frac{BM}{BP} = \lambda, \lambda \in [0,1], \text{ 则 } \overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BP} = \left(\frac{3}{2}\lambda, \frac{1}{2}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right),$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \left(\frac{3}{2}\lambda - 2, \frac{1}{2}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-1,1,0), \text{ 7 分}$$

设平面 ADM 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n} = -x + y = 0, \\ \overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{3}{2}\lambda - 2\right)x + \frac{1}{2}\lambda y + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda z = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } y = \lambda, \text{ 得 } \mathbf{n} = (\lambda, \lambda, 2\sqrt{2}(1-\lambda)), \text{ 9 分}$$

因为二面角 $P-AD-M$ 的大小为 45° ,

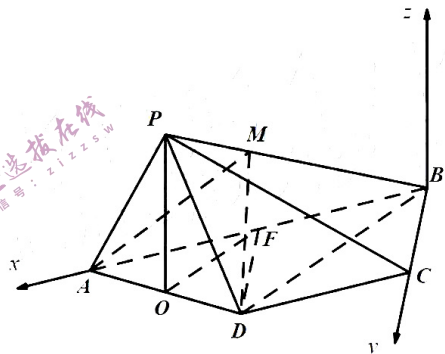
所以平面 ADM 与平面 $ABCD$ 所成的角也等于 45° ,

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0,0,1)$, 10 分

$$|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{|2\sqrt{2}(1-\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 8(1-\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因为 $\lambda \in [0,1]$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 11 分

所以线段 PB 上存在点 M , 当 $\frac{BM}{BP} = \frac{2}{3}$, 即 $\frac{PM}{PB} = \frac{1}{3}$ 时, 使得二面角 $P-AD-M$ 大小为 45° .



.....12分

解法三: (1) 同解法二;

(2) 过M点作MH ⊥ OB于H, 过H作HE ⊥ AD于E, 连结ME

由(1)知平面POB ⊥ 平面ABCD, 所以MH ⊥ 平面ABCD, 故MH ⊥ AD,

所以AD ⊥ 平面MHE, 因而ME ⊥ AD,

所以∠MEH是二面角M-AD-B的平面角.....7分

因为平面PAD ⊥ 平面ABCD, 二面角P-AD-M大小为45°,

所以二面角M-AD-B大小为45°, 从而∠MEH = 45°, 故MH = EH8分

设MH = h, 则EH = h,

因为HE ⊥ AD, BD ⊥ AD, 从而HE // BD,

$$\text{所以 } \frac{OH}{OB} = \frac{EH}{BD} = \frac{h}{\sqrt{2}},$$

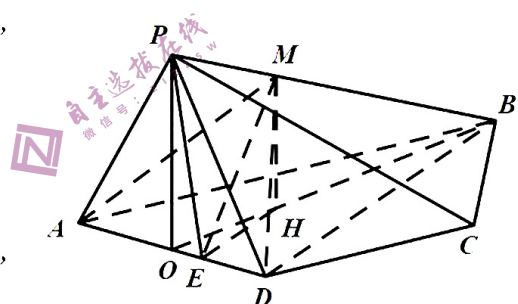
$$\text{从而 } \frac{BH}{OB} = \frac{\sqrt{2}-h}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

因为MH ⊥ OB, PO ⊥ OB, 从而MH // PO,

$$\text{所以 } \frac{BH}{OB} = \frac{MH}{PO} = \frac{BM}{PB}$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}-h}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ 解得 } h = \frac{\sqrt{2}}{3}, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{所以 } \frac{BM}{PB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3}, \text{ 从而 } \frac{PM}{PB} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$



19. 本题主要考查正弦定理、余弦定理、三角形面积公式等基础知识, 考查运算求解能力, 考查化归与转化思想等. 满分 12分.

解法一: (1) 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

$$\text{即 } 49 = a^2 + c^2 - ac. \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

$$\text{又内切圆半径为 } \sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} (a+b+c) \times \sqrt{3}, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{故 } ac = 2(a+c) + 14, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{于是 } \begin{cases} 49 = a^2 + c^2 - ac, \\ ac = 2(a+c) + 14, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} ac = 40, \\ a+c = 13, \end{cases}, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\text{得 } \begin{cases} a=8, \\ c=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=5, \\ c=8. \end{cases}$$

因为 $a > c$, 所以 $\begin{cases} a=8, \\ c=5. \end{cases}$ 6分

(2) 设 $BD=x, CD=y$, 由 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{x}{y} = \frac{5}{7}$, 8分

又因为 $x+y=8$,

所以 $BD = \frac{5}{12} \times 8 = \frac{10}{3}$ 9分

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理 $AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA \cdot BD \cdot \cos \frac{\pi}{3}$, 10分

得 $AD^2 = 25 + \frac{100}{9} - 2 \times 5 \times \frac{10}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{175}{9}$, 所以 $AD = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ 12分

解法二: (1) 设圆 O 与边 BC 相切于点 E , 连结 OE, OB ,

则 $OE \perp BC$, 且 $OE = \sqrt{3}$, 且 $\angle OBE = \frac{\pi}{6}$,

故 $BE = \sqrt{3}OE = 3$ 1分

因为 $\triangle ABC$ 三边与圆 O 相切, 切线长相等

所以 $(a-3) + (c-3) = 7$, 即 $a+c=13$, 2分

根据余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$, 即 $49 = a^2 + c^2 - ac$, 3分

所以 $ac = \frac{1}{3}[(a+c)^2 - 49] = 40$, 4分

解得 $\begin{cases} a=8, \\ c=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=5, \\ c=8. \end{cases}$

因为 $a > c$, 所以 $\begin{cases} a=8, \\ c=5. \end{cases}$ 6分

(2) 由余弦定理得 $\cos A = \frac{25+49-64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$ 7分

$\overrightarrow{AD} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) = \frac{\lambda}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{7} \overrightarrow{AC}$ 8分

又因为 $\frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda}{7} = 1$, $\lambda = \frac{35}{12}$ 9分

$|\overrightarrow{AD}|^2 = \left[\lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) \right]^2 = \lambda^2 (1+1+2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{7}) = \frac{16}{7} \lambda^2$, 11分

所以 $|\overrightarrow{AD}| = \frac{4}{\sqrt{7}} \times \frac{35}{12} = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ 12分

解法三: (1) 同解法一;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{25 + 49 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$,

所以 $\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, 7 分

又 $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$, 所以 $\frac{1}{7} = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$, 所以 $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

且 $\cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 9 分

$\sin \angle ADB = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{A}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$ 10 分

在 $\triangle ABD$ 中, 由 $\frac{AD}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$,

得 $\frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\frac{3\sqrt{21}}{14}}$, 所以 $AD = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ 12 分

20. 本小题主要考查列联表、二项分布、概率的期望等基础知识, 考查运算求解能力、数据处理能力、应用意识, 考查统计思想、化归与转化思想. 满分 12 分.

解: (1) (i) 依题意得 2×2 列联表如下:

	正确识别	错误识别	合计
A 组软件	40	20	60
B 组软件	20	20	40
合计	60	40	100

..... 1 分
 因为 $\chi^2 = \frac{100(40 \times 20 - 20 \times 20)^2}{60 \times 40 \times 60 \times 40} = \frac{25}{9} \approx 2.778 < 3.841$, 3 分

且 $P(\chi^2 \geq 3.841) = 0.05$

所以没有 95% 的把握认为软件类型和是否正确识别有关. 4 分

(ii) 由 (i) 得 $P_1 = \frac{2}{3}$, $P_2 = \frac{1}{2}$, 5 分

故方案二在一次测试中通过的概率为

$$P = C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + C_2^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

..... 7 分

(2) 方案二每次测试通过的概率为

$$P = C_2^1 \cdot P_1(1 - P_1) \cdot C_2^2 \cdot (P_2)^2 + C_2^2 (P_1)^2 \cdot C_2^1 \cdot P_2(1 - P_2) + C_2^2 (P_1)^2 \cdot C_2^2 (P_2)^2 \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= P_1 P_2 \left(\frac{8}{3} - 3P_1 P_2\right)$$

$$= -3(P_1 P_2)^2 + \frac{8}{3} P_1 P_2 \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= -3\left(P_1P_2 - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{16}{27}$$

所以当 $P_1P_2 = \frac{4}{9}$ 时, P 取到到最大值 $\frac{16}{27}$,10 分

$$\text{又 } P_1 + P_2 = \frac{4}{3}, \text{ 此时 } P_1 = P_2 = \frac{2}{3}.$$

因为每次测试都是独立事件,

故 n 次实验测试通过的次数 $X \sim B(n, P)$, 期望值 $E(X) = nP = 16$,

因为 $p \leq \frac{16}{27}$, 所以 $n = \frac{16}{p} \geq 16 \times \frac{27}{16} = 27$ 11 分

所以测试至少 27 次, 此时 $P_1 = P_2 = \frac{2}{3}$12 分

21. 本题主要考查直线、双曲线、直线与双曲线的位置关系等基础知识, 考查运算求解能力、推理论证能力, 考查化归与转化思想、数形结合思想, 考查考生分析问题和解决问题的能力, 满分 12 分.

解法一: (1) 因为点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 4$,

所以点 M 的轨迹为双曲线的右支,1 分

故 $a = 2$, $c = \sqrt{5}$, 所以 $b = 1$, 3 分

所以曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 (x > 0)$ 4 分

(未注明右支或 $x > 0$ 扣 1 分)

(2) 设 BC 与 AQ 的交点为 D .

显然直线 BC 的斜率存在, 设 BC 的方程为 $y = kx + m$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - 4y^2 = 4, \end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2 - 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 + 4 = 0$,

设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 - 1} \\ x_1x_2 = \frac{4m^2 + 4}{4k^2 - 1} \end{cases}$ 5 分

又 $k_{AC} = \frac{y_2}{x_2 - 2}$, $k_{AB} = \frac{y_1}{x_1 - 2}$, 因为 $k_{AC} \cdot k_{AB} = -1$,

所以 $\frac{y_2}{x_2 - 2} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} = -1$, 6 分

故 $(k^2 + 1)x_1x_2 + (mk - 2)(x_1 + x_2) + m^2 + 4 = 0$,

代入 $(k^2 + 1)\frac{4m^2 + 4}{4k^2 - 1} + (mk - 2)\left(-\frac{8km}{4k^2 - 1}\right) + m^2 + 4 = 0$, 整理得 $20k^2 + 3m^2 + 16km = 0$,

即 $(10k + 3m)(2k + m) = 0$, 解得 $m = -\frac{10}{3}k$ 或 $m = -2k$ (舍). 8

分

所以直线 BC 的方程为 $y = k(x - \frac{10}{3})$ ，即直线 BC 恒过定点 $(\frac{10}{3}, 0)$ 。.....9

分

因为 A, B, Q, C 四点共圆，且 BC 为直径，由 $BC \perp AD$ ，

所以点 D 为 AQ 中点，且直线 AD 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x - 2)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x - \frac{10}{3}), \\ y = -\frac{1}{k}(x - 2), \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{10k^2 + 6}{3(k^2 + 1)}, \\ y = \frac{-4k}{3(k^2 + 1)}. \end{cases}$$

所以点 $D(\frac{10k^2 + 6}{3(k^2 + 1)}, \frac{-4k}{3(k^2 + 1)})$ ，故 $Q(\frac{14k^2 + 6}{3(k^2 + 1)}, \frac{-8k}{3(k^2 + 1)})$11

分

$$\text{代入曲线 } E \text{ 的方程} \left[\frac{14k^2 + 6}{3(k^2 + 1)} \right]^2 - 4 \left[\frac{-8k}{3(k^2 + 1)} \right]^2 = 4,$$

解得 $k^4 - k^2 = 0$ ，即 $k = \pm 1$ ，所以直线 BC 的斜率为 ± 112 分

解法二：(1) 同解法一；

(2) 由对称性，直线 BC 必过定点 $(t, 0)$ ，.....5

分

$$\text{设 } BC \text{ 的方程为 } x = my + t, \text{ 联立方程} \begin{cases} x = my + t, \\ x^2 - 4y^2 = 4, \end{cases}$$

消去 x 得 $(m^2 - 4)y^2 + 2tmy + t^2 - 4 = 0$ ，

$$\text{设 } B(x_1, y_2), C(x_2, y_2), \text{ 所以} \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2tm}{m^2 - 4} \\ y_1 y_2 = \frac{t^2 - 4}{m^2 - 4} \end{cases} \dots\dots 6$$

分

$$k_{AC} = \frac{y_2}{x_2 - 2}, k_{AB} = \frac{y_1}{x_1 - 2},$$

因为 $k_{AC} \cdot k_{AB} = -1$ ，所以 $\frac{y_2}{x_2 - 2} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} = -1$ ，

故 $(m^2 + 1)y_1 y_2 + (tm - 2m)(y_1 + y_2) + t^2 - 4t + 4 = 0$ ，.....7 分

$$\text{代入} (m^2 + 1) \times \frac{t^2 - 4}{m^2 - 4} + m(t - 2) \left(-\frac{2tm}{m^2 - 4} \right) + (t - 2)^2 = 0,$$

因为 $t \neq 2$ ，整理得 $3t - 10 = 0$ ，解得 $t = \frac{10}{3}$ 。.....8

分

所以直线 BC 的方程为 $x = my + \frac{10}{3}$, 即直线 BC 恒过定点 $(\frac{10}{3}, 0)$9

分

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + \frac{10}{3}, \\ y = -m(x-2), \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{6m^2 + 10}{3(m^2 + 1)}, \\ y = \frac{-4m}{3(m^2 + 1)}. \end{cases}$$

所以点 $D(\frac{6m^2 + 10}{3(m^2 + 1)}, \frac{-4m}{3(m^2 + 1)})$, 故 $Q(\frac{6m^2 + 14}{3(m^2 + 1)}, \frac{-8m}{3(m^2 + 1)})$,11 分

$$\text{代入曲线 } E \text{ 的方程} \left[\frac{6m^2 + 14}{3(m^2 + 1)} \right]^2 - 4 \left[\frac{-8m}{3(m^2 + 1)} \right]^2 = 4,$$

解得 $m^2 - 1 = 0$, 即 $m = \pm 1$, 所以直线 BC 的斜率为 ± 112 分
解法三: (1) 同解法一;

(2) 设 AC 方程为 $y = k(x-2)$, 设 AB 方程为 $y = -\frac{1}{k}(x-2)$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} y = k(x-2) \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 得 } (1 - 4k^2)x^2 + 16k^2x - 16k^2 - 4 = 0,$$

设 $C(x_1, y_1)$, 则 $2 \cdot x_1 = \frac{16k^2 - 4}{1 - 4k^2}$, 得 $x_1 = \frac{8k^2 + 2}{4k^2 - 1}$,

所以 $y_1 = k(\frac{8k^2 + 2}{4k^2 - 1} - 2) = \frac{4k}{4k^2 - 1}$, 所以点 $C(\frac{8k^2 + 2}{4k^2 - 1}, \frac{4k}{4k^2 - 1})$5 分

用 $-\frac{1}{k}$ 替换 k 得点 $B(\frac{-2k^2 - 8}{k^2 - 4}, \frac{4k}{k^2 - 4})$6 分

所以 BC 斜率 $k_{BC} = \frac{\frac{4k}{4k^2 - 1} - \frac{4k}{k^2 - 4}}{\frac{8k^2 + 2}{4k^2 - 1} - \frac{2k^2 + 8}{k^2 - 4}} = -\frac{3k}{4(k^2 - 1)}$,7 分

故直线 BC 方程为 $y = -\frac{3k}{4(k^2 - 1)}(x + \frac{2k^2 + 8}{k^2 - 4}) + \frac{4k}{k^2 - 4}$,

即 $y = -\frac{3k}{4(k^2 - 1)}x + \frac{10k}{4(k^2 - 1)}$,

即 $y = -\frac{3k}{4(k^2 - 1)}(x - \frac{10}{3})$. 所以直线 BC 恒过定点 $(\frac{10}{3}, 0)$9

分

下同解法一.

解法四: (1) 同解法一;

(2) 将坐标系原点平移到 $A(2, 0)$, 则双曲线 E 的方程变为 $\frac{(x+2)^2}{4} - y^2 = 1$,

即 $x^2 - 4y^2 + 4x = 0$. 新坐标系下直线 BC 的方程设为 $mx + ny = 1$,5

分

代入双曲线方程有 $x^2 - 4y^2 + 4x(mx + ny) = 0$,

即 $(1+4m)x^2 - 4y^2 + 4nxy = 0$,6分

分

两边同除以 x^2 得 $4(\frac{y}{x})^2 - 4n\frac{y}{x} - 4m - 1 = 0$,7分

设直线 AC, AB 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{-4m-1}{4} = -1$, 所以 $m = \frac{3}{4}$,8分

分

所以直线 BC 的方程为 $\frac{3}{4}x + ny = 1$, 从而直线 BC 恒过定点 $(\frac{4}{3}, 0)$,

故原坐标系下直线 BC 恒过定点 $(\frac{10}{3}, 0)$9分

由 A, B, Q, C 四点共圆, 设 BC 的直线方程为 $y = k(x - \frac{10}{3})$,

即 $kx - y - \frac{10}{3}k = 0$; 设 AQ 的直线方程为 $y = -\frac{1}{k}(x - 2)$, 即 $x + ky - 2 = 0$.

所以过四点 A, B, Q, C 的二次曲线系方程为 $(kx - y - \frac{10}{3}k)(x + ky - 2) + \lambda(x^2 - 4y^2 - 4) = 0$,

.....11分

等式左边 xy 的系数为 $k^2 - 1$, 所以 $k^2 - 1 = 0$, 所以 $k = \pm 1$, 即直线 BC 的斜率为 ± 1 .

.....12分

解法五: (1) 同解法一;

(2) 由直线 BC 不过点 $(2, 0)$, 故设直线 BC 的方程为 $m(x-2) + ny = 1$,5分

所以由 $x^2 - 4y^2 = 4$ 得 $(x-2+2)^2 - 4y^2 = 4$,

即 $[(2m+1)(x-2) + 2ny]^2 - 4y^2 = 4[m(x-2) + ny]^2$,6分

两边同除以 $(x-2)^2$ 得 $[(2m+1) + 2n \cdot \frac{y}{x-2}]^2 - 4(\frac{y}{x-2})^2 = 4(m + n \cdot \frac{y}{x-2})^2$,7分

设 $\frac{y}{x-2} = k$, 上式整理得 $4k^2 - 4nk - 4m - 1 = 0$.

设直线 AC, AB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{-4m-1}{4} = -1$,

解得 $m = \frac{3}{4}$,8分

所以直线 BC 的方程为 $\frac{3}{4}(x-2)+ny=1$, 即 $\frac{3}{4}\left(x-\frac{10}{3}\right)+ny=0$,

从而 BC 恒过定点 $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ 9 分

下同解法五.

22. 本小题主要考查导数及其应用、不等式等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识等, 考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等. 满分 12 分.

解法一、(1) 当 $a \leq 0$ 时, 由 $e^x > 0$, 且 $x \in (0, \pi)$ 时 $\sin x > 0$,

故 $f(x) \leq 1$ 成立; 1 分

当 $a > 0$ 时, 即为 $f(x)_{\max} \leq 1$.

由 $f'(x) = a \cdot \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$, 2 分

分

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{4}$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ 单调递减, 3 分

所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \leq 1$, 即 $0 < a \leq \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ 4 分

综上, $a \leq \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ 5 分

(2) $f(x) = \frac{4\sin x}{e^x}$, $f'(x) = \frac{4(\cos x - \sin x)}{e^x}$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ 单调递减,

故 $0 < x_1 < \frac{\pi}{4} < x_2 < \pi$ 6 分

先证 $\frac{\pi}{2} - x_1 < x_2$, 由 $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - x_1$,

故即证 $f(x_2) < f\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$, 由 $f(x_1) = f(x_2)$,

故即证 $f(x_1) < f\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$, 设 $h(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - f(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 7 分

分

则 $h'(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - f'(x) = -4 \times \frac{(\sin x - \cos x)(e^x - e^{\frac{\pi}{2}-x})}{e^{\frac{\pi}{2}}}$ 7 分

所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减, 所以 $h(x) > h(\frac{\pi}{4}) = 0$ 8 分

现证 $\frac{\pi - x_2}{e^{\pi - x_2}} < \sin x_2$, 即证 $\frac{\pi - x_2}{e^{\pi - x_2}} < \sin(\pi - x_2)$, $x_2 \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$.

设 $t = \pi - x_2$, 故即证 $\frac{t}{e^t} < \sin t$, 即证 $e^t \sin t - t > 0$ 9 分

分

设 $g(t) = e^t \sin t - t$, $t \in (0, \frac{3\pi}{4})$,

则 $g'(t) = e^t(\sin t + \cos t) - 1$, 设 $p(t) = e^t(\sin t + \cos t) - 1$,

由 $p'(t) = 2e^t \cos t$, 所以 $p(t)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ 单调递减,

又 $p(0) = 0$, $p(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 > 0$, $p(\frac{3\pi}{4}) = -1 < 0$,

所以 $\exists t_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, 使得 $p(t_0) = 0$,

故 $g(t)$ 在 $(0, t_0)$ 单调递增, 在 $(t_0, \frac{3\pi}{4})$ 单调递减, 10 分

$g(t)_{\min} = \min \left\{ g(0), g\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right\}$,

又 $g(0) = 0$, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{3\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} - 3\pi}{4} > 0$, 11 分

所以 $g(t) > 0$, 即 $e^t \sin t - t > 0$,

故 $\frac{\pi - x_2}{e^{\pi - x_2}} < \sin x_2$ 12 分

解法二、(1) $f(x) = \frac{a \sin x}{e^x} \leq 1$, 由 $e^x > 0$, 且 $x \in (0, \pi)$ 时 $\sin x > 0$, 1 分

分

所以 $a \leq \left(\frac{e^x}{\sin x} \right)_{\min}$ 2 分

设 $g(x) = \frac{e^x}{\sin x}$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$, 3 分

分

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{4}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 单调递减, 在 $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ 单调递增, 4 分

分

所以 $g(x)_{\min} = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, 即 $a \leq \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ 5 分

$$(2) f(x) = \frac{4\sin x}{e^x}, \quad f'(x) = \frac{4(\cos x - \sin x)}{e^x},$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减,

故 $0 < x_1 < \frac{\pi}{4} < x_2 < \pi$ 6 分

先证 $\frac{\pi}{2} - x_1 < x_2$, 由 $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - x_1$,

故即证 $f(x_2) < f\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$, 由 $f(x_1) = f(x_2)$,

故即证 $f(x_1) < f\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$, 设 $h(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - f(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 7

分

$$\text{则 } h'(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - f'(x) = -4 \times \frac{(\sin x - \cos x)\left(e^x - e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)}{e^{\frac{\pi}{2}}} < 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减, 所以 $h(x) > h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

所以 $f(x_1) < f\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$, 从而 $x_1 + x_2 > \frac{\pi}{2}$ 8 分

$f(x)$ 在 $x = \pi$ 处的切线方程为 $y = \frac{-4}{e^\pi}(x - \pi)$, 9 分

现证 $\frac{-4}{e^\pi}(x_2 - \pi) < f(x_2)$.

$$\text{设 } r(x) = \frac{-4}{e^\pi}(x - \pi) - \frac{4\sin x}{e^x}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$$

$$r'(x) = \frac{-4}{e^\pi} - \frac{4(\cos x - \sin x)}{e^x} = -4\left(\frac{1}{e^\pi} + \frac{\cos x - \sin x}{e^x}\right),$$

$$\text{设 } t(x) = -4\left(\frac{1}{e^\pi} + \frac{\cos x - \sin x}{e^x}\right), \quad \text{则 } t'(x) = \frac{8\cos x}{e^x},$$

所以 $r'(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减,

$$r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4}{e^\pi} < 0, \quad r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{e^\pi} - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\right) > 0, \quad r'(\pi) = 0,$$

故所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $r'(x_0) = 0$,

故 $r(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, x_0\right)$ 单调递减, 在 (x_0, π) 单调递增, 10 分

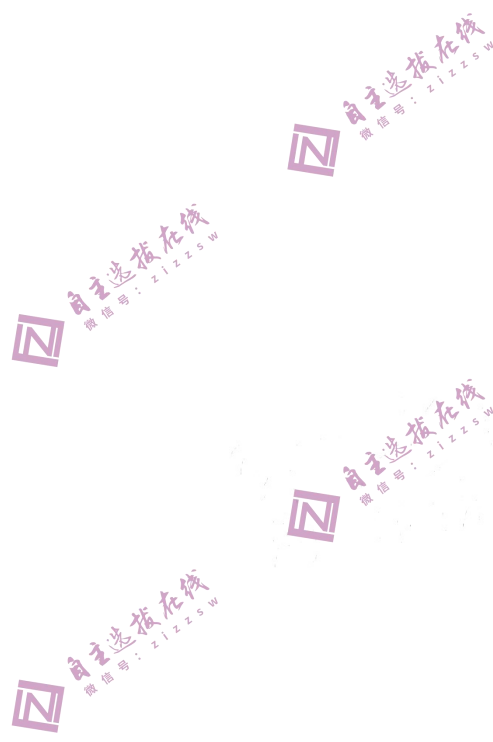
所以 $r(x)_{\max} = \max\left\{r\left(\frac{\pi}{4}\right), r(\pi)\right\}$,

$$\text{又 } r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{e^\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}} = \frac{3\pi - 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{e^\pi} < 0, \quad r(\pi) = 0, \dots\dots\dots 11$$

分

$$\text{故 } r(x) < 0, \quad \text{即 } \frac{-4}{e^\pi}(x_2 - \pi) < \frac{4\sin x_2}{e^{x_2}}, \quad \text{所以 } \frac{\pi - x_2}{e^{\pi - x_2}} < \sin x_2 \dots\dots\dots 12$$

分



微信号: zizzsw
微信号: zizzsw