天一大联考

“顶尖计划”2021届高中毕业班第三次考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $\frac{3i}{2+3i}$的虚部为

A. $\frac{1}{13}$　　B. $\frac{9}{13}$　　C. $-\frac{1}{13}$　　D. $\frac{6}{13}$

2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x^2-4=0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{2\}$　　B. $\{-2,0,1,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-2,1,2\}$

3. 已知两条不同的直线 l,m 和平面 α，$m\subset\alpha$，则 $l/\!/\alpha$ 是 $l/\!/m$ 的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点 $A(3,y_0)$ 到焦点的距离是点 A 到 y 轴距离的3倍，则 y_0 等于

A. $\pm 6\sqrt{2}$　　B. ± 6　　C. $\pm 12\sqrt{2}$　　D. ± 12

5. 函数 $f(x)=2x+\cos 2x$ 的图象在点$\left(\frac{5\pi}{12},f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$处的切线方程为

A. $x-y+\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$　　B. $x-y-\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

C. $x+y+\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$　　D. $x+y-\frac{5\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

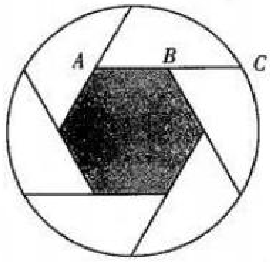
6. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)+b(0<\varphi<\pi)$ 有两个相邻的零点$\frac{\pi}{12}$和$\frac{3\pi}{4}$，则 $b=$

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -1

7. $(x^2+2x-3)^5$ 的展开式中 x 的系数为

A. 810　　B. 405　　C. -190　　D. -675

8. 下面是某手机 APP 的图标,其设计灵感来源于传统照相机快门的机械结构. 该图形是一个正六边形和六个全等的"曲边三角形"拼成的一个圆,且 $AB=BC$. 若在圆内随机取一点,则该点取自正六边形内部的概率为



A. $\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$　　D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

9. 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 且 $\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{7}$,则$\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$的值为

A. $-\frac{3}{2}$　　B. -1　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

10. 若圆 $x^2+y^2=6$ 上的两个动点 A,B 满足 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$,点 M 在圆 $x^2+y^2=16$ 上运动,则 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ 的最小值是

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=\log_4(3-x)$. 若对任意的 $x\in[0,b+1]$,均有 $f(x+b)\geqslant f(2x)$,则实数 b 的最大值是

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. 0　　D. 1

12. 在$\triangle ABC$ 中,$AB=3$,$AC=2BC$,则$\triangle ABC$ 的面积的取值范围是

A. $(0,2]$　　B. $[1,3]$　　C. $(0,3]$　　D. $(0,6]$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若 $a\log_4 3=\frac{1}{2}$,则 $3^a+9^a=$__________.

14. 已知平面区域 D 是以点 $A(-1,3)$,$B(2,0)$,$C(-2,-1)$为顶点的三角形区域(含边界),若在区域 D 内存在无穷多个点(x,y)能使目标函数 $z=x+my$ 取得最小值,则 $m=$__________.

15. 过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点 F 作 x 轴的垂线,与双曲线 C 及其一条渐近线在第一象限分别交于 A,B 两点,且$\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$($O$ 为坐标原点),则该双曲线的离心率是__________.

16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3,AC_1//平面 α,BD//平面 α,则正方体在平面 α 内的正投影面积为__________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=-\frac{1}{8}n^2+\frac{7}{8}n$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式；

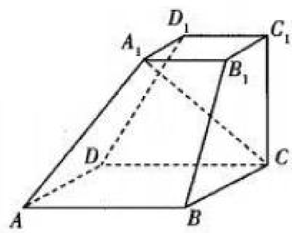
(Ⅱ)求数列$\left\{a_n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}$的前 2 021 项之和.

18. (12 分)

如图，四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面均为菱形，$CC_1\perp$平面 $ABCD$，$\angle BAD=60°$，$\angle A_1AD=\angle A_1AB=45°$，$AB=2A_1B_1=2$.

(Ⅰ)证明：平面 $A_1AB\perp$平面 A_1AD；

(Ⅱ)求直线 CA_1 与平面 A_1AB 所成角的正弦值.



19. (12 分)

某工厂的某种产品成箱包装，每箱 100 件，每箱产品在交付用户之前至多要作两轮检验，先从这箱产品中随机抽取 10 件作初检，根据初检结果决定是否再抽取 10 件进行复检. 如检验出不合格品，则更换为合格品，每件产品的检验费用为 50 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 200 元赔偿费用.

(Ⅰ)假设某箱产品中仅有 2 件不合格品，求这 2 件不合格品在初检时都被抽到的概率.

(Ⅱ)若初检时检验出 x($x\in\mathbf{N}$ 且 $0\leqslant x\leqslant 10$)件不合格品，则认为该箱剩余的每件产品为不合格品的概率均为$\frac{x}{10}$，且各件产品是否为不合格品相互独立. 以一箱产品的检验费用和赔偿费用之和的期望值为决策依据，分析 x 为何值时，不需要进行复检.

20.（12 分）

已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)(c>0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，经过 F 且垂直于 x 轴的直线交 Γ 于第一象限的点 M，O 为坐标原点，且 $|OM|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 Γ 的方程.

（Ⅱ）设不经过原点 O 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线交椭圆 Γ 于 A,B 两点，A,B 关于原点 O 对称的点分别是 C,D，试判断四边形 $ABCD$ 的面积有没有最大值. 若有，请求出最大值；若没有，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=2e^{x-2}+ax$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）对任意 $x>0$，求证：$f(x)>x(\ln x+a)$.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在极坐标系中，已知曲线 $C:\rho=\frac{2a}{1-a\cos\theta}$.

（Ⅰ）若 $0<a<1$，曲线 C 与极轴所在直线交于 A,B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{2}$，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $a=1$，直线 l_1,l_2 经过极点且相互垂直，l_1 与 C 交于 P,Q 两点，l_2 与 C 交于 M,N 两点，求 $|PQ|+|MN|$ 的最小值.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x+1|$.

（Ⅰ）解关于 x 的不等式 $f(x)<8$；

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\geq k|x|$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

天一大联考
"顶尖计划"2021 届高中毕业班第三次考试
理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 D

命题意图 本题考查复数的概念和基本运算.

解析 由题意得,$\frac{3i}{2+3i}=\frac{3i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{9+6i}{13}=\frac{9}{13}+\frac{6}{13}i$,故其虚部为$\frac{6}{13}$.

2. 答案 B

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 因为 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{x|x^2-4=0\}=\{-2,2\}$,所以 $A\cup B=\{-2,0,1,2\}$.

3. 答案 D

命题意图 本题考查空间位置关系的推理,以及充分条件和必要条件的判断.

解析 若 $l//\alpha$,不能说明直线 l 平行于平面 α 内的任意一条直线,所以不一定有 $l//m$,故充分性不成立;若 $l//m$ 且 $m\subset\alpha$,也不能说明 $l//\alpha$,因为还有可能 $l\subset\alpha$,故必要性不成立.

4. 答案 A

命题意图 本题考查抛物线的性质.

解析 因为 $3+\frac{p}{2}=9$,所以 $p=12$,$y^2=24x$,又点 $A(3,y_0)$ 在抛物线 $y^2=24x$ 上,所以代入得 $y_0^2=24\times3$,解得 $y_0=\pm6\sqrt{2}$.

5. 答案 A

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 由题意得 $f'(x)=2-2\sin 2x$,所以 $f(x)$ 在点 $\left(\frac{5\pi}{12},f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$ 处的切线斜率为 $k=f'\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2-2\sin\frac{5\pi}{6}=1$,又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $\left(\frac{5\pi}{12},f\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x-\frac{5\pi}{12}$,即 $x-y+\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由题意得 $x=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴,所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$,由 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)+b=0$,得 $b=-\frac{1}{2}$.

7. 答案 A

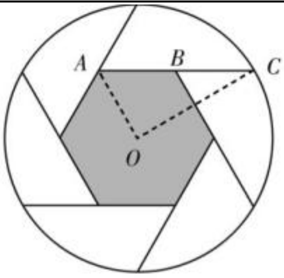
命题意图 本题考查二项式定理的应用.

解析 $(x^2+2x-3)^5=(x+3)^5(x-1)^5$,所以 x 的系数为 $C_5^4\times3^4\times C_5^5(-1)^5+C_5^5\times3^5\times C_5^4\times(-1)^4=810$.

8. 答案 B

命题意图 本题考查几何概型的概率计算.

解析 如图所示,设 O 是圆心,则 O 也是正六边形的中心. 设正六边形的边长为 1,则 $OA=1$,$AC=2$,$OC=\sqrt{3}$,即圆的半径为$\sqrt{3}$,所以圆的面积为 3π,正六边形的面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,所以所求的概率为$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$.



9. **答案** B

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 由 $\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{7}$,得$\dfrac{\tan 2\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan 2\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{7}$,得$\dfrac{\tan 2\alpha+1}{1-\tan 2\alpha}=-\frac{1}{7}$,解得 $\tan 2\alpha=-\frac{4}{3}$,则$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$,解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$($\tan\alpha=2$ 舍去). $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\tan\alpha-\frac{1}{2}=-1$.

10. **答案** C

命题意图 本题考查圆的方程以及平面向量的线性运算.

解析 由 $x^2+y^2=6$ 可知圆心为坐标原点 $O(0,0)$,半径为 $r=\sqrt{6}$,因为$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$,所以圆心到直线 AB 的距离 $d=\sqrt{r^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$,设 AB 的中点为 N,则$|ON|=d=2$,所以 N 点在以原点为圆心,以 $r_1=2$ 为半径的圆上,所以 N 点的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$,因为 N 为 AB 的中点,所以$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MN}$,因为点 M 在圆 $x^2+y^2=16$ 上运动,圆 $x^2+y^2=16$ 的半径 $r_2=4$,所以$|\overrightarrow{MN}|_{\min}=r_2-r_1=2$,所以$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|_{\min}=2|\overrightarrow{MN}|_{\min}=4$.

11. **答案** B

命题意图 本题考查函数的奇偶性和单调性.

解析 由于当 $x\leqslant 0$ 时 $f(x)=\log_4(3-x)$ 为单调递减函数,又因为函数 $f(x)$ 为偶函数,所以当 $x>0$ 时 $f(x)$ 为单调递增函数. 所以 $f(x+b)\geqslant f(2x)$ 等价于 $|x+b|\geqslant|2x|$,即 $|x+b|\geqslant 2x$. 由区间的定义可知 $b>-1$,若 $x+b\geqslant 0$,于是 $x+b\geqslant 2x$,即 $b\geqslant x$,由于 x 的最大值为 $b+1$,故 $b\geqslant x$ 显然不恒成立;若 $b+x<0$,所以 $x+b\leqslant -2x$,即 $x\leqslant -\frac{1}{3}b$,所以 $b+1\leqslant -\frac{1}{3}b$,即 $b\leqslant -\frac{3}{4}$,故 b 的最大值为 $-\frac{3}{4}$.

12. **答案** C

命题意图 本题考查三角形的有关计算.

解析 设 $BC=x$,则 $AC=2x$,由余弦定理可知 $\cos B=\dfrac{9+x^2-4x^2}{6x}=\dfrac{3-x^2}{2x}$,$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin B=\frac{3}{2}x\sqrt{1-\left(\frac{3-x^2}{2x}\right)^2}=\frac{3}{4}\sqrt{16-(x^2-5)^2}$,由 $2x-x<3<2x+x$ 得 $1<x<3$,所以 $1<x^2<9$,$0<16-(x^2-5)^2\leqslant 16$,所以$\triangle ABC$ 的面积的取值范围是$(0,3]$.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** 6

命题意图 本题考查对数和指数的运算性质.

解析 由条件得 $a=\frac{1}{2}\log_3 4=\log_3 2$,所以 $3^a+9^a=2+4=6$.

14. **答案** $-\frac{1}{4}$

命题意图 本题考查简单的线性规划问题.

解析 由题可知 $m=0$ 不满足题意，所以 $m\neq 0$. 由 $z=x+my$ 得 $y=-\frac{1}{m}x+\frac{z}{m}$. 若 $-\frac{1}{m}=k_{AB}=-1$，则 $m=1$，仅当直线 $y=-x+z$ 经过点 C 时 z 取得最小值，不符合条件；若 $-\frac{1}{m}=k_{BC}=\frac{1}{4}$，则 $m=-4$，仅当直线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}z$ 经过点 A 时 z 取得最小值，不符合条件；若 $-\frac{1}{m}=k_{AC}=4$，则 $m=-\frac{1}{4}$，当直线 $y=4x-4z$ 与 AC 重合时 z 取得最小值，符合条件.

15. **答案** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

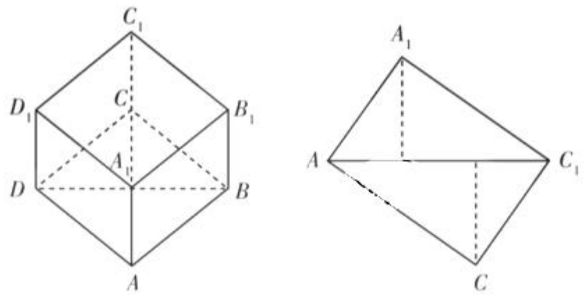
命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 设双曲线 C 的半焦距为 $c(c>0)$. 联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ x=c,\end{cases}$ 得点 $A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$. 联立 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\ x=c,\end{cases}$ 得点 $B\left(c,\frac{bc}{a}\right)$. 由条件可得 $|BF|=2|AF|$，所以 $\frac{bc}{a}=\frac{2b^2}{a}$，则 $c=2b$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{c^2-b^2}}=\frac{2b}{\sqrt{4b^2-b^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16. **答案** $6\sqrt{6}$

命题意图 本题考查空间几何体的结构特征.

解析 正方体在平面 α 内的正投影如图所示（各顶点的投影用对应点的字母表示），在正方体中可得 $AC_1=3\sqrt{3}$，$BD=3\sqrt{2}$，因为 $AC_1\perp$ 平面 α，$BD//$ 平面 α，所以在正投影中它们的长度不变. 在平面 ACC_1 内分析可知在正投影中 A_1 和 C 是 AC_1 的两个三等分点，所以 $BB_1=DD_1=A_1C=\sqrt{3}$，所以正投影的面积为 $2\times\frac{1}{2}(\sqrt{3}+3\sqrt{3})\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{6}$.



三、**解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.**

17. **命题意图** 本题考查数列的通项与求和公式.

解析 （Ⅰ）因为 $S_n=-\frac{1}{8}n^2+\frac{7}{8}n$，所以 $a_1=S_1=\frac{3}{4}$， ……………………………………………………（1 分）

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-\frac{1}{8}n^2+\frac{7}{8}n\right)+\frac{1}{8}(n-1)^2-\frac{7}{8}(n-1)=1-\frac{n}{4}$， ………………………（3 分）

$n=1$ 时，$a_1=\frac{3}{4}$ 也符合上式，所以 $a_n=1-\frac{n}{4}$. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d=-\frac{1}{4}$ 的等差数列，则

$a_1\sin\frac{\pi}{2}+a_2\sin\pi+a_3\sin\frac{3\pi}{2}+a_4\sin 2\pi=a_1-a_3=-2d=\frac{1}{2}$；

$a_5\sin\frac{5\pi}{2}+a_6\sin 3\pi+a_7\sin\frac{7\pi}{2}+a_8\sin 4\pi=a_5-a_7=-2d=\frac{1}{2}$；

……

根据正弦函数的周期性可知：

$a_1\sin\frac{\pi}{2}+a_2\sin\pi+\cdots+a_{2\,021}\sin\frac{2\,021\pi}{2}=\frac{1}{2}\times 505+a_{2\,021}=\frac{505}{2}+1-\frac{2\,021}{4}=-\frac{1\,007}{4}$. ………………（5 分）

18. **命题意图** 本题考查空间几何体的结构特征，空间位置关系的推理与证明，以及利用空间向量计算空间角.

解析 （Ⅰ）作 $BE\perp AA_1$，垂足为 E，连接 DE,BD，如图.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle BAD=60°,AB=2$，所以 $BD=2$. ……（1 分）

因为 $AB=AD,AE=AE,\angle A_1AD=\angle A_1AB=45°$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle ADE$， ……（2 分）

所以 $BE=DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$，所以 $BE^2+DE^2=BD^2$，即 $BE\perp DE$. ……（3 分）

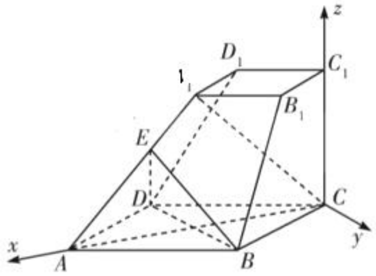
又因为 $AA_1\cap DE=E,AA_1,DE\subset$ 平面 A_1AD，所以 $BE\perp$ 平面 A_1AD. ……（4 分）

因为 $BE\subset$ 平面 A_1AB，所以平面 $A_1AB\perp$ 平面 A_1AD. ……（5 分）

（Ⅱ）连接 AC，以 C 为坐标原点，分别以 CA 和 CC_1 所在直线为 x,z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.

设 $CC_1=h$，则 $C(0,0,0),A(2\sqrt{3},0,0),B(\sqrt{3},1,0),A_1(\sqrt{3},0,h)$. ……（6 分）

所以 $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{3},0,h),\overrightarrow{CA_1}=(\sqrt{3},0,h)$.



依题意知 $\cos\angle A_1AB=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AA_1}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{3+h^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……（8 分）

设平面 A_1AB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-\sqrt{3}x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{6}}{2}z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{2})$. ……（10 分）

因为 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CA_1}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CA_1}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}\times\sqrt{3+\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{3}$，

所以直线 CA_1 与平面 A_1AB 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$. ……（12 分）

19. **命题意图** 本题考查概率的计算、随机变量的数学期望.

解析 （Ⅰ）从 100 件产品中抽取 10 件，2 件不合格品都被抽到的概率为

$\dfrac{C_{98}^{8}C_2^2}{C_{100}^{10}}=\dfrac{\frac{98!}{90!\ 8!}}{\frac{100!}{90!\ 10!}}=\dfrac{90}{9\ 900}=\dfrac{1}{110}$. ……（4 分）

（Ⅱ）①若不进行复检，令 Y 表示剩余的 90 件产品中的不合格品数，则 $Y\sim B\left(90,\dfrac{x}{10}\right)$，

则一箱产品的检验费用和赔偿费用之和 $X_1=50\times10+200Y=500+200Y$，

$E(X_1)=E(500+200Y)=500+200E(Y)=500+1\ 800x$； ……（7 分）

②若进行复检，令 Z 表示剩余 80 件产品中的不合格品数，则 $Z\sim B\left(80,\dfrac{x}{10}\right)$，

则一箱产品的检验费用和赔偿费用之和 $X_2=50\times20+200Z=1\ 000+200Z$，

$E(X_2)=E(1\ 000+200Z)=1\ 000+200E(Z)=1\ 000+1\ 600x$. ……（10 分）

当 $E(X_1)<E(X_2)$ 时，不需要进行复检，

由 $500+1\,800x<1\,000+1\,600x$ 得 $x<2.5$,

即当 $x=0,1,2$ 时,不需要进行复检. …………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与椭圆的性质,椭圆与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $a^2=\frac{4}{3}c^2$,① …………………………………………………… (1 分)

又由 $a^2=b^2+c^2$,可得 $b^2=\frac{c^2}{3}$. ② …………………………………………………………………… (2 分)

联立 $\begin{cases} x=c, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=c, \\ y=\pm\frac{b^2}{a}, \end{cases}$ 则点 $M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$.

则 $|OM|=\sqrt{c^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$. ③ ………………………………………………………… (3 分)

联立①②③,解得 $c=\sqrt{3}$,$a=2$,$b=1$.

故椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)设直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$,

联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $2x^2+4mx+4(m^2-1)=0$, ………………………………… (5 分)

所以 $\Delta=(4m)^2-4\times2\times4(m^2-1)=16(2-m^2)>0$,解得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. ……………… (6 分)

则 $x_1+x_2=-2m$,$x_1x_2=2(m^2-1)$. …………………………………………………………… (7 分)

则 $|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}|x_1-x_2|$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(-2m)^2-4\times2(m^2-1)}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{8-4m^2}$. …………………………………………………………………… (8 分)

原点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|m|$,

则直线 CD 到直线 AB 的距离为 $d'=2d=\frac{4\sqrt{5}}{5}|m|$, ……………………………………………… (9 分)

显然四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $S_{四边形ABCD}=|AB|d'=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{8-4m^2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}|m|=2\sqrt{m^2(8-4m^2)}=2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot4m^2(8-4m^2)}$ …… (11 分)

$\leqslant2\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{4m^2+(8-4m^2)}{2}\right]^2}=4$,当且仅当 $4m^2=8-4m^2$,即 $m=\pm1$ 时,等号成立,

故四边形 $ABCD$ 的面积存在最大值,且最大值为 4. …………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f'(x)=2e^{x-2}+a$, …… (1 分)

当 $a\geqslant 0$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; …… (2 分)

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)>0$,解得 $x>2+\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$;令 $f'(x)<0$,解得 $x<2+\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,2+\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$ 上单调递减,在 $\left(2+\ln\left(-\frac{a}{2}\right),+\infty\right)$ 上单调递增. …… (4 分)

(Ⅱ)要证 $f(x)>x(\ln x+a)$,即证 $2e^{x-2}+ax>x(\ln x+a)$,

即证 $2e^{x-2}>x\ln x$,又 $x>0$,所以 $\frac{2e^{x-2}}{x}>\ln x$,即证 $\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x}-\ln x>0$. …… (5 分)

令 $g(x)=\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x}-\ln x$,则 $g'(x)=\frac{2(x-1)e^x-e^2x}{e^2x^2}$.

令 $r(x)=2(x-1)e^x-e^2x$,则 $r'(x)=2xe^x-e^2$, …… (6 分)

易得 $r'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $r'(1)=2e-e^2<0$,$r'(2)=3e^2>0$,

所以存在唯一的实数 $x_0\in(1,2)$,使得 $r'(x_0)=0$, …… (7 分)

所以 $r(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. …… (8 分)

因为 $r(0)=-2<0$,$r(2)=0$,

所以当 $r(x)>0$ 时,$x>2$;当 $r(x)<0$ 时,$0<x<2$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, …… (10 分)

所以 $g(x)\geqslant g(2)=1-\ln 2>0$. …… (11 分)

综上,$\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x}-\ln x>0$,即 $f(x)>x(\ln x+a)$. …… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查极坐标系的应用.

解析 (Ⅰ)设极点为 O.

令 $\theta=0$,得 $|OA|=\rho_1=\frac{2a}{1-a}$,令 $\theta=\pi$,得 $|OB|=\rho_2=\frac{2a}{1+a}$, …… (2 分)

则 $|AB|=|OA|+|OB|=\frac{2a}{1-a}+\frac{2a}{1+a}=4\sqrt{2}$, …… (4 分)

解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$($a=-\sqrt{2}$ 舍去). …… (5 分)

(Ⅱ)设直线 $l_1:\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$,则 $l_2:\theta=\alpha+\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$. …… (6 分)

则 $|PQ|=\frac{2}{1-\cos\alpha}+\frac{2}{1+\cos\alpha}=\frac{4}{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{\sin^2\alpha}$, …… (7 分)

用 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 替换 α 得 $|MN|=\frac{4}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{4}{\cos^2\alpha}$, …… (8 分)

所以 $|PQ|+|MN|=\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=\frac{16}{\sin^2 2\alpha}$,

则当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时,$|PQ|+|MN|$ 取最小值 16. …… (10 分)

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的性质的应用、绝对值不等式的求解.

解析 (Ⅰ)由 $f(x)<8$ 可得:

$\begin{cases}x<-1,\\(1-2x)-(x+1)<8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\(1-2x)+(x+1)<8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>\frac{1}{2},\\(2x-1)+(x+1)<8,\end{cases}$

解得 $-\frac{8}{3}<x<-1$ 或 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x<\frac{8}{3}$,

所以原不等式的解集为 $\left(-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$. ………………………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)当 $x=0$ 时,不等式显然成立;

当 $x\neq0$ 时,不等式 $f(x)\geqslant k|x|$ 可变为 $k\leqslant\frac{f(x)}{|x|}=\frac{|2x-1|+|x+1|}{|x|}$, ………………………………(6 分)

而 $\frac{|2x-1|+|x+1|}{|x|}=\left|\frac{1}{x}-2\right|+\left|\frac{1}{x}+1\right|\geqslant\left|\left(\frac{1}{x}-2\right)-\left(\frac{1}{x}+1\right)\right|=3$, ……………………………(8 分)

当且仅当 $\left(\frac{1}{x}-2\right)\left(\frac{1}{x}+1\right)\leqslant0$,即 $-1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant2$ 时,取得等号.

故 $\frac{|2x-1|+|x+1|}{|x|}$ 的最小值为 3. ………………………………………………………………(9 分)

所以 k 的取值范围是 $(-\infty,3]$. ………………………………………………………………(10 分)

关于我们