

“皖东县中联盟”2022-2023 学年第一学期高三联考

数学试题

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 z 满足 $i^2 - zi - 1 = 0$ (i 为虚数单位),则 $|z| =$
A. 1 B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 3
2. 设集合 $M = \{x | 2 - \frac{1}{x} < x\}$, $N = \{x | \ln(2^x - 1) \leq 0\}$,则 $M \cap N =$
A. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ B. $(0, 1]$ C. $(0, 1)$ D. $(0, +\infty)$
3. 设动直线 $l_1: ax + y + 1 = 0$, $l_2: x + ay - 1 = 0$ ($a \in \mathbb{R}$),则“ $a = 1$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_6 = \frac{1}{3}$,且数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列,则 $a_{19} =$
A. 16 B. $\frac{1}{16}$ C. 19 D. $\frac{1}{19}$
5. 设 $f_n(x) = \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^{n-1}}$,则 $f_5(\frac{8\pi}{3}) =$
A. $-\frac{\sqrt{3}}{32}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ C. $-\frac{1}{16}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{16}$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - a \cdot 2^x, & x \leq 0, \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(2024) = 1$,则实数 a 的值为
A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
7. 2022 年 9 月底,在长江台州段,工作人员发现大面积盛开的野大豆,野大豆的发现,对我国大豆的育种等有很大的帮助,通过上一代野大豆的培育,出现某新品种,有“抗倒伏”和“抗虫害”两种遗传性状,该新品种出现“抗倒伏”性状的概率为 $\frac{4}{15}$,出现“抗虫害”性状的概率为 $\frac{2}{15}$,“抗倒伏”和“抗虫害”性状都不出现的概率为 $\frac{7}{10}$,则该品种在“抗倒伏”性状的条件下,出现“抗虫害”性状的概率为
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$



8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点 F_1, F_2 恰为椭圆 $E: \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$ 的两个顶点, 设椭圆 E 的上焦点为 P , 过点 F_2 的直线 l 交双曲线 C 右支于点 A, B , 若点 A 在第一象限, $\triangle ABP$ 的外心 Q 恰好落在 y 轴上, 则直线 l 的方程为

A. $y = -x + 2$

B. $y = x - 2$

C. $y = (4\sqrt{5} - 9)(x - 2)$

D. $y = (4\sqrt{5} + 9)(x - 2)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列函数中, 最小值是 4 的函数有

A. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} (x > -1)$

B. $f(x) = \sin x + \frac{4}{\sin x} (0 < x < \pi)$

C. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$

D. $f(x) = 4^x + \frac{4}{4^x}$

10. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 点 D, E 满足 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DC}$, BD 与 CE 交于点 O , 则

A. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = -1$

B. $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = 0$

C. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\overrightarrow{ED}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影向量为 $\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

11. 一种糖果的包装纸由一个边长为 6 的正方形和 2 个等腰直角三角形组成(如图 1), 沿 AD, BC 将 2 个三角形折起到与平面 $ABCD$ 垂直(如图 2), 连接 EF, AE, CF , 若 G 为 FC 上的动点, 则下列说法正确的是

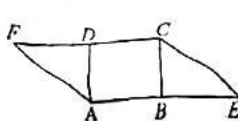


图1

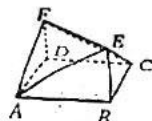


图2

A. 若 G 为线段 FC 的中点, 则 $GB \parallel$ 平面 AEF

B. 多面体 $ABCDFE$ 的体积为 144

C. $AG^2 + BG^2$ 的最小值为 108

D. $EC \perp AF$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\tan A + \tan B = \frac{\sqrt{3}c}{a \cos B}$, 则下列结论正确的是

A. $A = \frac{\pi}{6}$

B. 若 $a = 2$, 则该三角形周长的最大值为 6

C. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 2, a, b, c 边上的高分别为 h_1, h_2, h_3 , 且 $h_1 h_2 h_3 = t$, 则 t^2 的最大值为 $24\sqrt{3}$

D. 设 $\overrightarrow{BD} = \frac{c}{2b+c}\overrightarrow{BC}$, 且 $AD = 1$, 则 $b + 2c$ 的最小值为 $\frac{9\sqrt{7}}{7}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x(3 - x)$, 那么 $f(2) + f(0) =$ _____.

14. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各个棱长均为 2, 其外接球的球心为 O , 以 O 为球心, 以 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线的长度为 _____.

【高三联考·数学试题 第 2 页(共 4 页)】

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x, & x < 1, \\ x^2 - 2x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的值域为 _____; 若函数 $g(x) =$

$f(x) - k$ 有 2 个零点, 则 k 的取值范围是 _____.

16. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 A, B, C 在抛物线上, F 为 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $|AF| + |BF| + |CF| = 6$, 直线 l 过点 $(4, 0)$ 与抛物线交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} =$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

设向量 $m = (2\cos \omega x, \sqrt{3}\sin \omega x)$, $n = (\cos \omega x, 2\cos \omega x)$, 函数 $f(x) = m \cdot n + a (\omega > 0, a \in \mathbb{R})$ 的最大值为 1, 且图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若将函数 $f(x)$ 图象上所有点的纵坐标不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x)$ 在区间 $[0, t]$ 上的最小值为 $g(0)$, 求实数 t 的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

在① $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = S_n + 1$, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和; ② $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1}^2 = a_n(8a_n - 2a_{n+1})$ 这两个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答.

已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 _____, $b_n = \frac{1}{1 + \log_2 a_n}$.

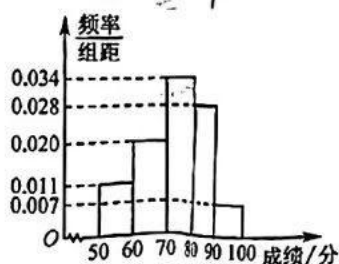
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \sqrt{3b_n^2 + 1} - b_n^2$, 且 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $n \leq T_n < n + \frac{1}{2}$.

注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答给分.

19. (本小题满分 12 分)

某课题组开展“皖东地区中学体育现状教学调查与发展对策研究”, 以皖东地区 2 市 2 区 4 县 285 所中学为研究对象, 其中县城高中 22 所, 县城初中 9 所, 农村高中 29 所, 农村初中 225 所. 旨在增强“全民健身”理念、增强中学生身体素质与优化中学体育教学管理. 课题组从“体育管理、体育师资、体育科研、《体育与健康》课程教学、课外体育、体育场地设施”这六个方面进行赋分, 并制作了调查问卷(满分共 100 分), 分发问卷并整理相关数据, 从问卷中随机抽取 200 份, 按成绩分为五组: $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$, 得到如下频率分布直方图, 且第五组中县城高中占 $\frac{3}{7}$.



【高三联考·数学试题 第 3 页(共 4 页)】

233312D

- (1)估计抽取的 200 份问卷的数据平均值 $\bar{x}$ (同一组数据用该组区间的中点值代替);
- (2)若在第五组中,按照县城高中和非县城高中两类随机抽取 7 份问卷,再从中选取 3 份问卷作进一步调研,设这 3 份问卷中包含县城高中问卷数为 X ,求 X 的分布列和数学期望;
- (3)根据教育部发布《〈体育与健康〉教学改革指导纲要》精神,指导全国中小学体育教师科学、规范、高质量地上好体育课,更好地帮助学生在体育锻炼中“享受乐趣、增强体质、健全人格、锤炼意志”,促进青少年学生身心健康全面发展具有积极指导作用.根据相关数据,体育教学综合质量指标 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ (用样本平均数 $\bar{x}$ 和方差 s^2 作为 μ, σ^2 的近似值且取整数),若某市有 65 所中学学校,试估计该市中学学校体育教学综合质量指标在 $(64, 97]$ 内的学校数量. (结果保留整数)
- 参考数据:若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$
- 可能用到的数据: $\sum_{i=1}^{200} (x_i - \bar{x})^2 = 24\ 000$, $\sqrt{30} \approx 5.477$.

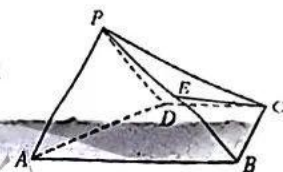
20. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AP \perp PD$, $AB \perp BC$, $PA = PD = DC = BC = 1$, $AB = 2$, E 是 PB 的中点.

(1)求 CE 的长;

(2)设二面角 $P-AD-B$ 平面角的补角大小为 θ , 若 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 求

平面 PAD 和平面 PBC 夹角余弦值的最小值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 短轴长为 $2\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $l: y = kx + t$ 与椭圆 C 相切, 点 F_1, F_2 到直线的距离分别为 d_1, d_2 , 求 $d_1 + d_2$ 的最小值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + \sin x - mx$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $y + 1 = 0$ 平行.

(1)求实数 m 的值, 并求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若不等式 $f(x) - ax^2 - 1 \geq 0$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线