# 2023 年高三二模参考答案

# 数　学

本试卷 4 页，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1．选 D．

2．选 C．

3．选 B．

4．选 B．

5．选 A．

6．选 D．

7．选 B．

8．选 C．

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。**

9．【答案】选 BCD　　10．【答案】选 ABC　　11．【答案】选 BD　　12．【答案】选 ABD．

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13．【答案】$\dfrac{21}{2}$　　14．【答案】$2\sqrt{3}$　　15．【答案】20　　16．【答案】$\dfrac{13}{3}$．

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17．（10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $a_1=1$，且 $a_1,a_2,S_3$ 成等比数列．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{1}{4S_n-1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$．

【解析】（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，由 $a_1,a_2,S_3$ 成等比数列，

得 $a_1\cdot S_3=a_2{}^2$ 即 $3+3d=(1+d)^2$，解得 $d=2$或$-1$，

当 $d=-1$ 时 $a_2=0$ 不合题意，所以 $d=2$，即 $a_n=2n-1$；　　（5 分）

（2）由（1）得 $S_n=n^2$ 所以 $b_n=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$．　　（10 分）

18．（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，且 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$．

（1）求 $\dfrac{b}{c}$；

（2）已知 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$a=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积．

【解析】（1）由题设得 $2bc\cos A+3ac\cos B=ab\cos C$，

由余弦定理，$2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+3ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

整理得 $b^2=3c^2$，所以 $\dfrac{b}{c}=\sqrt{3}$．（6 分）

（2）由（1）知 $b=\sqrt{3}c$，由余弦定理得 $(\sqrt{3}c)^2=c^2+4-2$创$2\quad c\quad\cos\dfrac{\pi}{4}$，解得 $c=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$，

故△$ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}2c\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．（12 分）

19．（12 分）

大气污染物 $PM_{2.5}$（大气中直径小于或等于 2.5 μm 的颗粒物）的浓度超过一定的限度会影响人的身体健康．为了研究 $PM_{2.5}$ 的浓度是否受到汽车流量等因素的影响，研究人员选择了 24 个社会经济发展水平相近的城市，在每个城市选择一个交通点建立监测点，统计每个监测点 24 h 内过往的汽车流量（单位：千辆），同时在低空相同的高度测定每个监测点空气中 $PM_{2.5}$ 的平均浓度（单位：μg/m$^3$），得到的数据如下表：

| 城市编号 | 汽车流量 | $PM_{2.5}$ 浓度 | 城市编号 | 汽车流量 | $PM_{2.5}$ 浓度 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.30 | 66 | 11 | 1.82 | 135 |
| 2 | 1.44 | 76 | 12 | 1.43 | 99 |
| 3 | 0.78 | 21 | 13 | 0.92 | 35 |
| 4 | 1.65 | 170 | 14 | 1.44 | 58 |
| 5 | 1.75 | 156 | 15 | 1.10 | 29 |
| 6 | 1.75 | 120 | 16 | 1.84 | 140 |
| 7 | 1.20 | 72 | 17 | 1.11 | 43 |
| 8 | 1.51 | 120 | 18 | 1.65 | 69 |
| 9 | 1.20 | 100 | 19 | 1.53 | 87 |
| 10 | 1.47 | 129 | 20 | 0.91 | 45 |

（1）根据上表，若 24 h 内过往的汽车流量大于等于 1500 辆属于车流量大，$PM_{2.5}$ 大于等于 75 μg/m$^3$ 属于空气污染．请结合表中的数据，依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，能否认为车流量大小与空气污染有关联？

（2）设 $PM_{2.5}$ 浓度为 $y$，汽车流量为 $x$．根据这些数据建立 $PM_{2.5}$ 浓度关于汽车流量的线性回归模型，并求出对应的经验回归方程（系数精确到 0.01）．

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

| $\alpha$ | 0.100 | 0.050 | 0.010 |
|---|---|---|---|
| $x_\alpha$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 |

$\sum_{i=1}^{20}x_i=27.8$，$\sum_{i=1}^{20}y_i=1770$，$\sum_{i=1}^{20}x_i^2=40.537$，$\sum_{i=1}^{20}y_i^2=193694$，$\sum_{i=1}^{20}x_iy_i=2680.48$．

在经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\end{cases}$．

【解析】（1）由题知，列二联表，如下图

| | 汽车流量大于等于 1500 辆 | 汽车流量小于 1500 辆 | 合计 |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| $PM_{2.5}$ 大于等于 75 | 7 | 4 | 11 |
| $PM_{2.5}$ 小于 75 | 1 | 8 | 9 |
| 合计 | 8 | 12 | 20 |

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{20\times(7\times8-4\times1)^2}{11\times9\times8\times12}\approx 5.69>3.841,$$

依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可以认为车流量大小与空气污染有关联.（5 分）

（2）由题知，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}x_iy_i-20\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{2680.48-20\times\frac{27.8}{20}\times\frac{1770}{20}}{40.537-20\times(\frac{27.8}{20})^2}\approx 116.19$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{x}=\dfrac{1770}{20}-116.19\times\dfrac{27.8}{20}\approx-73.00$，

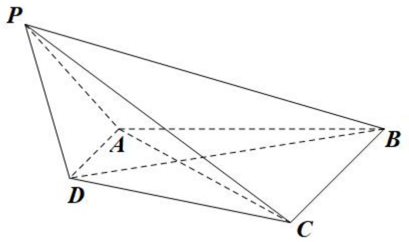
故 $PM_{2.5}$ 浓度关于汽车流量的经验回归方程为 $\hat{y}=116.19x-73.00$．（12 分）

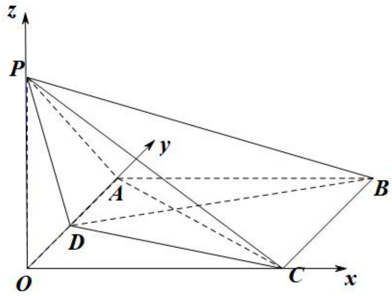
20．（12 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AD// BC$，$\angle DAB=90^\circ$，$AB=BC=4$，$PA=PC=5$．

（1）求证：$PB\perp AC$；

（2）若平面 $PBD\perp$ 平面 $PBC$，且 $\triangle PAD$ 中，$AD$ 边上的高为 3，求 $AD$ 的长．




【解析】（1）设线段 $AC$ 中点为 $E$，连接 $BE$，$PE$，

由 $AB=BC$ 及 $PA=PC$ 得 $BE\perp AC$ 且 $PE\perp AC$，又 $BE\cap PE=E$，所以 $AC\perp$ 平面 $PBE$，

又 $PB\subset$ 平面 $PBE$，所以 $PB\perp AC$．（5 分）

（2）过点 $P$ 作 $PO$ 垂直直线 $AD$ 于点 $O$，则 $PO=3$，

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\perp AD$ 及 $PO\subset$ 平面 $PAD$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

连接 $OC$，由 $PA=PC=5$，$PO=3$，易知 $OA=OC=4$，所以四边形 $ABCO$ 是菱形，

因为 $\angle DAB=90^\circ$，所以四边形 $ABCO$ 是正方形，且 $OA,OC,OP$ 两两互相垂直，

以 $O$ 为空间直角坐标系原点，分别以 $OC$，$OA$，$OP$ 方向为 $x$ 轴正半轴，$y$ 轴正半轴，$z$ 轴正半轴，建立如图空间直角坐标系．

设 $OD=a$，则 $P(0,0,3)$，$D(0,a,0)$，$B(4,4,0)$，$C(4,0,0)$，

即 $\overrightarrow{PD}=(0,a,-3)$，$\overrightarrow{PB}=(4,4,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-4,0)$，$\overrightarrow{PC}=(4,0,-3)$，

设平面 $PBD$ 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，得 $x_1=\dfrac{a-4}{4}y_1$，$z_1=\dfrac{a}{3}y_1$；不妨取 $y_1=1$，则 $\vec{m}=\left(\dfrac{a-4}{4},1,\dfrac{a}{3}\right)$，同理可得平面 $PBC$ 的一个法向量 $\vec{n}=\left(1,0,\dfrac{4}{3}\right)$，

由平面 $PBD\perp$ 平面 $PBC$ 得 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，所以 $a=\dfrac{36}{25}$，即 $AD=4-\dfrac{36}{25}=\dfrac{64}{25}$．（12 分）

21．（12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

（1）求双曲线 $C$ 的方程；

（2）设 $P,Q$ 为双曲线 $C$ 上异于点 $M$ $(\sqrt{2}a,b)$ 的两动点，记直线 $MP,MQ$ 的斜率分别为 $k_1$，$k_2$，若

$k_1+k_2=2k_1k_2$，求证：直线 $PQ$ 过定点．

【解析】(1) 由题意知 $2c=2\sqrt{3}$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$c^2=a^2+b^2$，解得 $a=\sqrt{2},b=1$，

所以双曲线 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$． （4 分）

(2) 由题意可知直线 $PQ$ 斜率存在，设其方程为 $y=kx+m$，与 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 联立，

得 $(1-2k^2)x^2-4kmx-2m^2-2=0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{4km}{1-2k^2},x_1x_2=\dfrac{-2m^2-2}{1-2k^2}$， （6 分）

由 $k_1+k_2=2k_1k_2$ 得 $\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=2\dfrac{y_1-1}{x_1-2}\times\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$，

即 $\dfrac{(y_1-1)(x_2-2)+(x_1-2)(y_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\dfrac{2(y_1-1)(y_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，

即 $(kx_1+m-1)(x_2-2)+(x_1-2)(kx_2+m-1)=2(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)$，

即 $2kx_1x_2+(m-1)(x_1+x_2)-2k(x_1+x_2)-4(m-1)=2k^2x_1x_2+2k(m-1)(x_1+x_2)-2(m-1)^2$，

将 $x_1+x_2=\dfrac{4km}{1-2k^2},x_1x_2=\dfrac{-2m^2-2}{1-2k^2}$ 代入上式并整理得 $m^2+2k+2km-1=0$， （9 分）

即 $(m+1)(m-1+2k)=0$，故 $m=-1$ 或 $m=1-2k$．

当 $m=-1$ 时，直线 $PQ$ 方程为 $y=kx-1$ 过定点 $(0,-1)$；

当 $m=1-2k$ 时，直线 $PQ$ 方程为 $y=k(x-2)+1$ 过点 $M$ 与题意矛盾．

综上，直线 $PQ$ 过定点 $(0,-1)$． （12 分）

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln x$．

(1) 求函数 $g(x)=f(x)-x$ 的零点；

(2) 证明：对于任意的正实数 $k$，存在 $x_0>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $k\sqrt{x}>f(x)$．

【解析】(1) 由题，$g(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln x-x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

因为 $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-1=-(\dfrac{1}{x}-1)^2\le 0$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减． （3 分）

又 $g(1)=0$，故函数 $g(x)$ 的零点为 $1$． （5 分）

(2) 由 (1) 可知 $x>1$ 时，$g(x)<0$，即 $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}(x>1)$，

因此 $\ln x=2\ln\sqrt{x}<\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\sqrt{x}(x>1)$，进而 $\ln x=2\ln\sqrt{x}<2\sqrt{\sqrt{x}}=2\sqrt[4]{x}(x>1)$．

注意到，当 $k>0$ 时，$\dfrac{k}{2}\sqrt{x}>\dfrac{1}{x}$ 等价于 $x>(\dfrac{2}{k})^{\frac{2}{3}}$，$\dfrac{k}{2}\sqrt{x}>4\sqrt[4]{x}$ 等价于 $x>(\dfrac{8}{k})^4$，

于是，对于任意的正实数 $k$，取 $x_0=\max\{(\dfrac{2}{k})^{\frac{2}{3}},(\dfrac{4}{k})^4,1\}$，则当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，有

$k\sqrt{x}=\dfrac{k}{2}\sqrt{x}+\dfrac{k}{2}\sqrt{x}>\dfrac{1}{x}+4\sqrt[4]{x}>\dfrac{1}{x}+2\ln x=f(x)$，即证． （12 分）