

绝密★启用前

赤峰市高三年级 4·20 模拟考试试题  
理科数学

注意事项：

- 1、答卷前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在答题卡上。
- 2、回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
- 3、考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A \cap C_U B = \{1, 3\}$ ,  $C_U (A \cup B) = \{2, 4\}$ , 则集合  $B$  为 ( )

- A.  $\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$       B.  $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$       C.  $\{5, 6, 7, 8\}$       D.  $\{1, 2, 3, 4\}$

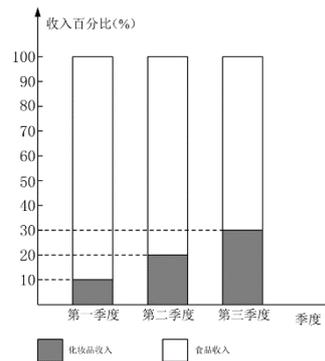
2、棣莫弗公式  $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta, i \sin n\theta)$ , ( $i$  是虚数单位,  $r > 0$ ) 是由法国数

学家棣莫弗(1667-1754)发现的. 根据棣莫弗公式, 在复平面内的复数  $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^{11}$

对应的点位于 ( )

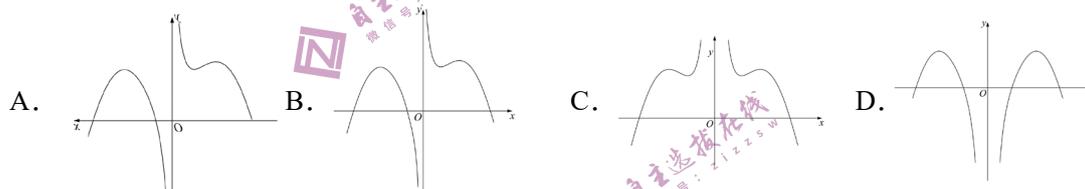
- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

3、在“万众创业”的大背景下，“直播电商”已经成为我国当前经济发展的新增长点，已知某电商平台的直播间经营化妆品和食品两大类商品，2022年前三个季度，该直播间每个季度的收入都比上一个季度的收入翻了一番，其前三季度的收入情况如图所示，则（ ）



- A. 该直播间第三季度总收入是第一季度总收入的3倍；
- B. 该直播间第三季度化妆品收入是第一季度化妆品收入的6倍；
- C. 该直播间第三季度化妆品收入是第二季度化妆品收入的3倍；
- D. 该直播间第三季度食品收入低于前两个季度的食品收入之和。

4、函数  $f(x) = x \sin x - \frac{1}{x^2}$  在  $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$  上的图像大致为（ ）



5、九连环是中国杰出的益智游戏，九连环由9个相互连接的环组成，这9个环套在一个中空的长形柄中，九连环的玩法就是要将这9个环从柄上解下来(或套上)，规则如下:如果要解下(或套上)第  $n$  环，则第  $n-1$  号环必须解下(或套上)， $n-1$  往前的都要解下(或套上)才能实现. 记解下  $n$  连环所需的最少移动步数为  $a_n$ ，已知  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1 (n \geq 3)$ ，若要解下7环最少需要移动圆环步数为（ ）

- A. 42
- B. 85
- C. 170
- D. 341

6、下列选项中，命题  $p$  是命题  $q$  的充要条件的是 ( )

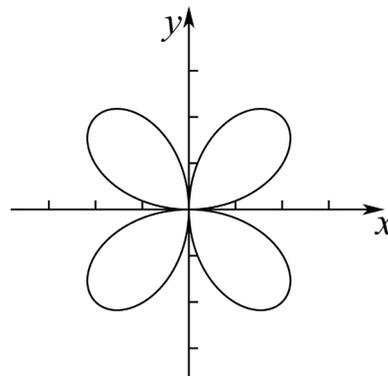
- A. 在  $\triangle ABC$  中,  $p: A > B$ ,  $q: \sin A > \sin B$ .
- B. 已知  $x, y$  是两个实数,  $p: x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ,  $q: 0 \leq x \leq 2$ .
- C. 对于两个实数  $x, y$ ,  $p: x + y \neq 8$ ,  $q: x \neq 3$  或  $y \neq 5$ .
- D. 两条直线方程分别是  $l_1: ax + 2y + 6 = 0$ ,  $l_2: x + (a-1)y + a^2 - 1 = 0$ ,  $p: l_1 \parallel l_2$ ,  
 $q: a = 2$  或  $-1$ .

7、记函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的最小正周期为  $T$ . 若  $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$  为  $f(x)$  的零点, 则  $\omega$  的最小值为 ( )

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 6

8、四叶草曲线是数学中的一种曲线, 因形似花瓣, 又被称为四叶玫瑰线(如右图), 其方程为  $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ , 玫瑰线在几何学、数学、物理学等领域中有广泛应用。例如, 它可以用于制作精美的图案、绘制图像、描述物体运动的轨迹等等。根据方程和图象, 给出如下 4 条性质, 其中错误的是 ( )

- A. 四叶草曲线方程是偶函数, 也是奇函数;
- B. 曲线上两点之间的最大距离为  $2\sqrt{2}$ ;
- C. 曲线经过 5 个整点(横、纵坐标都是整数的点);
- D. 四个叶片围成的区域面积小于  $2\pi$ .



9、在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ ，已知  $c \cos B + b \cos C = 2a \cos A$ ， $a = 2$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ ，则  $\triangle ABC$  的周长是（ ）

- A. 4                      B. 6                      C. 8                      D. 18

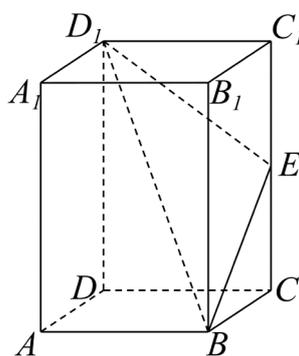
10、如图所示，在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，点  $E$  是棱  $CC_1$  上的一个动点，若平面  $BED_1$  与棱  $AA_1$  交于点  $F$ ，给出下列命题：

①四棱锥  $B_1 - BED_1F$  的体积恒为定值；

②直线  $D_1E$  与直线  $DC$  交于点  $P$ ，直线  $D_1F$  与直线  $DA$  交于点  $Q$ ，则  $P, B, Q$  三点共线；

③当截面四边形  $BED_1F$  的周长取得最小值时，满足条件的点  $E$  至少有两个；

④  $M$  为底面  $ABCD$  对角线  $AC$  和  $BD$  的交点，在棱  $DD_1$  上存在点  $H$ ，使  $MH \parallel$  平面  $EBD_1$ ，其中真命题是（ ）



- A. ①②③                      B. ②③④                      C. ①②④                      D. ①③④

11、已知  $a = 1 + \tan(-0.2)$ ， $b = \ln 0.8e$ ， $c = \frac{1}{e^{0.2}}$ ，其中  $e$  为自然对数的底数，则（ ）

- A.  $a > b > c$                       B.  $a > c > b$                       C.  $b > a > c$                       D.  $c > a > b$

12、初中时代我们就说反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图像是双曲线，建立适当的平面直角坐标系可以求得这个双曲线的标准方程，比如，把  $y = \frac{1}{x}$  的图象顺时针旋转  $\frac{\pi}{4}$  可以得到双曲线

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 。已知函数  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{x}$ ，在适当的平面直角坐标系中，其标准方程可能是（ ）

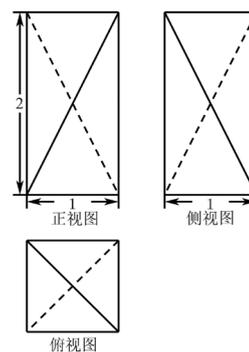
- A.  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$                       B.  $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{14} = 1$                       C.  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$                       D.  $\frac{y^2}{14} - \frac{x^2}{14} = 1$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13、已知向量  $\vec{a} = (2, 0)$ ， $\vec{b} = (x, 2\sqrt{3})$ ，且  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\frac{2\pi}{3}$ ，则  $x =$ \_\_\_\_\_.

14、已知  $(x-1)^6 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_6(1+x)^6$ ，则  $a_4 =$ \_\_\_\_\_.

15、某三棱锥的三视图如右图所示，则此三棱锥外接球的体积是\_\_\_\_\_.



16、已知抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$ ，焦点为  $F$ ，过点  $M(-2\sqrt{2}, -p)$  作抛物线  $C$  的两条切线，切点分别是  $A$ ， $B$ ，已知线段  $AB$  的中点  $N(x_0, 6)$ ，则  $|AF| \cdot |BF|$  的值是\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17、(12 分)

① 函数  $f(x)$  对任意  $x \in R$  有  $f(x) + f(1-x) = 1$ ，数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)$ ，令  $b_n = \frac{4}{(2a_n - 1)^2}$ 。

② 数列  $\{a_n\}$  中，已知  $a_1 = \frac{1}{2}$ ，对任意的  $p, q \in N^*$  都有  $a_{p+q} = a_p + a_q$ ，令  $b_n = \frac{1}{a_n^2}$ 。

在①、②中选取一个作为条件，求解如下问题（注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）

(1) 数列  $\{a_n\}$  是等差数列吗？请给予证明。

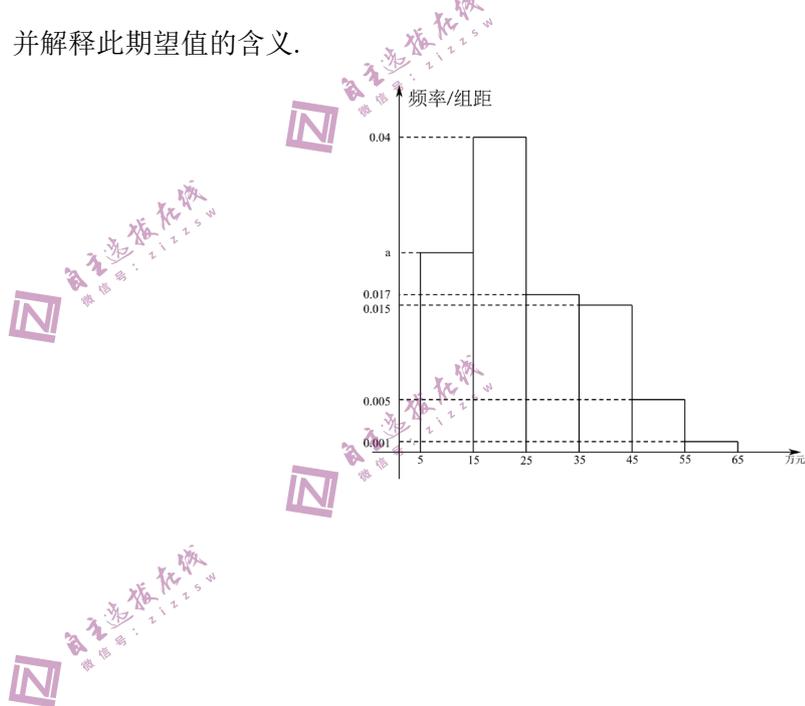
(2) 设  $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ ， $M_n = 8 - \frac{4}{n}$ ，试比较  $T_n$  与  $M_n$  的大小。

18、(12分)

2022年中国新能源汽车销售继续蝉联全球第一，以生产充电电池起家的比亚迪在2002年才进入汽车行业，2022年2月已成为全球唯一一家同时掌握电池、电机、电控芯片、整车制造等全产业链核心技术的新能源汽车厂商，成为新能源汽车（纯电动和插电式混动）的销量冠军，在中国新能源汽车的总销量中占比约为 $\frac{1}{3}$ 。2022年4月3日，比亚迪宣布停止纯燃油汽车的整车生产，成了全球首家“断油”的企业，为了解中国新能源车的销售情况，随机调查10000辆新能源汽车的销售价格，得到如下的样本数据的频率分布直方图：

(1) 求 $a$ 的值，并求出中国新能源车的销售价格的平均数、众数、中位数；

(2) 若从新能源车中随机的抽出3辆，设这3辆新能源车中比亚迪汽车的数量为 $X$ ，求 $X$ 的分布列与数学期望，并解释此期望值的含义。

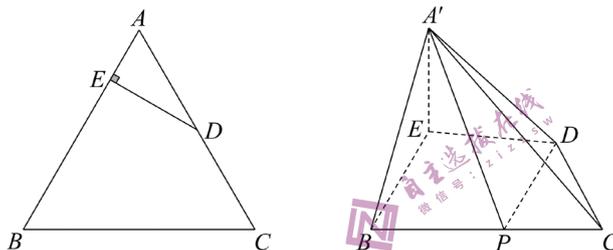


19、(12分)

已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，其边长为4，点 $D$ 为边 $AC$ 的中点，点 $E$ 在边 $AB$ 上，并且 $DE \perp AB$ ，将 $\triangle ADE$ 沿 $DE$ 折起到 $\triangle A'DE$ 。

(1) 证明：平面 $A'BE \perp$ 平面 $BCDE$ ；

(2) 当平面 $A'DE$ 与平面 $BCDE$ 成直二面角时，在线段 $BC$ 上是否存在一点 $P$ ，使得平面 $A'PD$ 和平面 $A'BE$ 所成二面角的正切值为 $\sqrt{3}$ ，若存在，求出点 $P$ 的位置；若不存在，请说明理由。



自主选播在线  
微信号: z1225w

自主选播在线  
微信号: z1225w

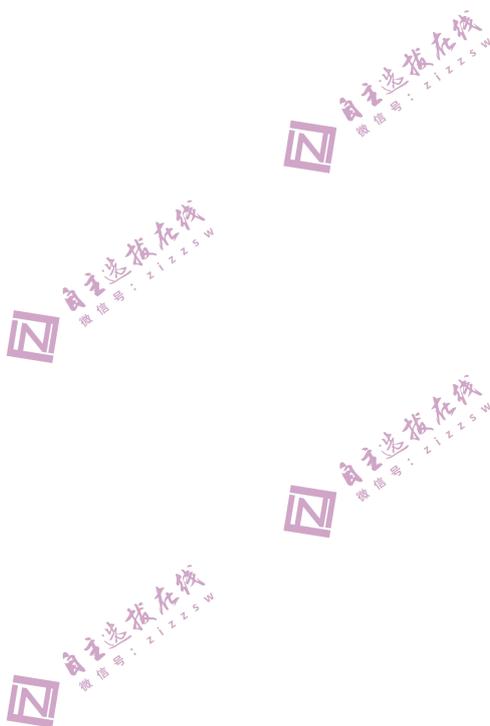
自主选播在线  
微信号: z1225w

20、(12分)

已知函数  $f(x) = e^x, g(x) = a(x^2 - x) (a \in R)$ .

(1) 在当  $a = -1$  时, 分别求  $f(x)$  和  $g(x)$  过点  $(0,0)$  的切线方程;

(2) 若  $f(x) + g(x) - \cos x \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围.



21、(12分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ ，其左、右顶点分别为  $A, B$ ，左右焦点为

$F_1, F_2$ ，点  $P$  为椭圆上异于  $A, B$  的动点，且  $\triangle PF_1F_2$  的面积最大值为  $\sqrt{3}$

(1) 求椭圆  $E$  的方程及  $k_{PA} \cdot k_{PB}$  的值 ( $k_{PA}$ 、 $k_{PB}$  分别指直线  $PA$ 、 $PB$  的斜率)

(2) 设动直线  $l$  交椭圆  $E$  于  $M, N$  两点，记直线  $AM$  的斜率为  $k_1$ ，直线  $BN$  的斜率为  $k_2$ ，

且  $k_1 = \frac{1}{3}k_2$

① 求证：直线  $MN$  过定点

② 设  $\triangle AMN$ 、 $\triangle BMN$  的面积分别为  $S_1, S_2$ ，求  $|S_1 - S_2|$  的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22、[选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系中，曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \end{cases}$  ( $t$  为参数)，以坐标原点为极点，

$x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线  $C_2$  的方程为  $\rho(1-\sin\theta)=1$

(1) 求曲线  $C_1$  的普通方程，曲线  $C_2$  的直角坐标方程；

(2) 若点  $M(0,-1)$ ，曲线  $C_1$ ， $C_2$  的交点为  $A, B$  两点，求  $|MA| \cdot |MB|$  的值

23、[选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x)=|2x+1|+|x+a|$ ，若  $f(x) \leq 3$  的解集为  $[b,1]$ 。

(1) 求实数  $a, b$  的值；

(2) 已知  $m, n$  均为正数，且满足  $\frac{1}{2m} + \frac{2}{n} + 2a = 0$ ，求证： $4m^2 + n^2 \geq 4$ 。