# 全国卷(新高考) 数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分，测试时间 120 分钟.
5. 考试范围：高考全部内容.



## 第Ⅰ卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求

1. 设 i 是虚数单位，若复数 $z=\frac{2}{1+i}+2i$，则 $|z|=$ C

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 设集合 $A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x^2+x-6<0\}$，则 $A\cap B=$ A

A. $\{x|-2<x<2\}$　　B. $\{x|-3<x<2\}$

C. $\{x|-2<x<3\}$　　D. $\{x|2<x<4\}$

3. 曲线 $y=\frac{ax}{x-1}$ 在点 $(2,2a)$ 处的切线方程为 $3x-y+b=0$，则

A. $a=3,b=-12$　　B. $a=-3,b=0$　　C. $a=3,b=0$　　D. $a=-3,b=-12$

4. 意大利数学家斐波那契(约 1170～1250)，以兔子繁殖为例，引入“兔子数列”：即 1，1，2，3，5，8，13，21，34，89，144，233⋯. 在实际生活中，很多花朵(如梅花，飞燕草，万寿菊等)的瓣数恰是斐波那契数列中的数，那契数列在现代物理及化学等领域也有着广泛的应用. 已知斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n$ $a_n(n\in N^*)$，若 $1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=a_k$，则 $k=$ B

A. 2020　　B. 2021　　C. 59　　D. 60

5. 已知 $A$，$B$ 为单位圆 $O$：$x^2+y^2=1$ 上的两点，且满足 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$，点 $P$ 为圆 $O$ 上一动点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 C

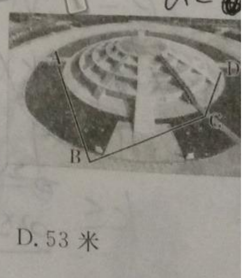
A. $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$　　B. $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$

C. $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$　　D. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

6. 已知双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的右焦点为 $F$，$O$ 为坐标原点，以 $F$ 为圆心，$OF$ 为半径的圆与双曲线 $C$ 的条渐近线相交于 $O$，$A$ 两点，若 $\triangle OAF$ 的面积等于 2，则双曲线 $C$ 的离心率为 C

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

7. 如图是隋唐天坛，古叫圜丘，它位于唐长安城明德门遗址东约 950 米，即今西安市雁塔区陕西师范大学以南. 天坛初建于隋而废弃于唐末，比北京明清天坛早 1000 多年，是隋唐王朝近三百年里的皇家祭天之处. 某数学兴趣小组为了测得天坛的直径，在天坛外围测得 $AB=60$ 米，$BC=60$ 米，$CD=40$ 米，$\angle ABC=60°$，$\angle BCD=120°$，据此可以估计天坛的最下面一层的直径 $AD$ 大约为 C




(结果精确到 1 米)(参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{5}\approx2.236$，$\sqrt{7}\approx2.646$)

A. 39 米　　B. 43 米　　C. 49 米　　D. 53 米

8. 已知关于 $x$ 的方程 $k\cdot e^x-e^x-\sqrt{|x|}=0$ 恰好有 3 个不相等的实数根，则实数 $k$ 的取值范围为

A. $(1,\frac{\sqrt{2e}}{2}+1)$　　　　B. $(1,\frac{\sqrt{2e}}{2e}+\frac{3}{4})$　　D

C. $(1,\frac{1}{e}+1)$　　　　D. $(1,\frac{\sqrt{2e}}{2e}+1)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 设函数 $f(x)=2^{x-1}+2^{1-x}$，则　　BC

A. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增　　B. $f(x)$ 的最小值是 2

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称　　D. $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $a_{n+1}=S_n+n-1$，则下列结论正确的是　　B

A. 若 $a_1=1$，则数列 $\{S_n+n\}$ 为等比数列　　B. 若 $a_1=1$，则数列 $\{a_n+1\}$ 为等比数列

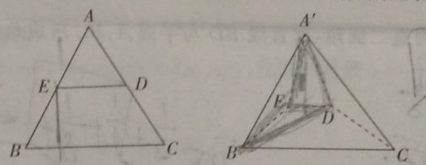
C. 若 $a_1=-1$ 则数列 $\{S_n+n\}$ 为等差数列　　D. 若 $a_1=-1$ 则数列 $\{a_n+1\}$ 为等差数列

11. 甲、乙、丙三位同学进行乒乓球比赛，设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$，约定赛制如下：累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束. 经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空. 则下列说法正确的是

A. 最少进行 3 场比赛　　B. 第三场比赛甲轮空的概率为 $\frac{1}{4}$

C. 乙最终获胜的概率为 $\frac{9}{32}$　　D. 丙最终获胜的概率 $\frac{7}{16}$

12. 如图，在等边三角形 $ABC$ 中，$AB=2$，点 $D,E$ 分别是 $AC,AB$ 的中点，以 $DE$ 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起，使点 $A$ 到达点 $A'$ 的位置（$A'\notin$ 平面 $BCDE$），则在 $\triangle ADE$ 翻转过程中，下列说法正确的是




A. 四棱锥 $A'-BCDE$ 的体积的最大值是 $\frac{9}{8}$

B. 当二面角 $A'-DE-B$ 为直二面角时，$|A'B|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. 一定存在某个位置，使平面 $A'BC\perp$ 平面 $BCDE$

D. 平面 $A'ED\perp$ 平面 $BCDE$ 时，四棱锥 $A'-BCDE$ 外接球的表面积为 $\frac{13\pi}{3}$

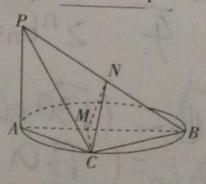
## 第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0\\ (\frac{1}{2})^x, & x\le 0\end{cases}$，且 $f(a)+f(-1)=0$，则实数 $a=$ $\underline{\ \frac{1}{4}\ }$.

14. 已知圆 $E:(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F$ 重合，过点 $F$ 的直线 $l$ 与抛物线 $C$ 交于 $A,B$ 两点，与圆 $E$ 交于 $M,N$ 两点（其中 $A$ 点和 $M$ 点在第一象限），则 $|AM|\cdot|BN|=$ ________.

15. 如图，点 $C$ 在以 $AB$ 为直径的圆周上运动（$C$ 点与 $A,B$ 不重合），$P$ 是平面 $ABC$ 外一点，且 $PA\perp$ 平面 $ABC$，$PA=AB=2$，过 $C$ 点分别作直线 $AB,PB$ 的垂线，垂足分别为 $M,N$，则三棱锥 $B-CMN$ 体积的最大值为 ________.




16. 已知函数 $f(x)=\sin 2x\cdot|\sin x|$，则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\underline{\ \pi\ }$；$f(x)$ 的最大值为 $\underline{\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ }$（本题第一空 2 分，第二空 3 分）.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在①$\cos B=-\frac{2}{3}$；②$a=7$；③$b=3$，这三个条件中任选两个，补充在下面问题中，使问题中的三角形存在，并求$\triangle ABC$的面积.

②③

问题：在$\triangle ABC$中，$a,b,c$是角$A,B,C$所对的边，已知$\sin B-\sin C=\sin(A-C)$，补充的条件________和________.

$\sin B-\sin C=\sin A\cos C-\cos A\sin C$

$b-c=a\cos C-\cos A\, c$

$b-c=a\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}-c\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b-c=\frac{b^2+a^2-c^2-b^2-c^2+a^2}{2b}=\frac{2a^2-2c^2}{2b}=b-c$

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=3$，且$a_3^2=2a_7$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$a_1>0$，设数列$\{b_n\}$满足$2b_1+2^2b_2+2^3b_3+\cdots+2^nb_n=a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

$a_2=3.\ (3+d)^2=2(3+5d)$

$9+d^2+6d=6+10d.\quad d^2-4d+3=0$

$d^2+3-4d=0\qquad (d-1)(d-3)=0$

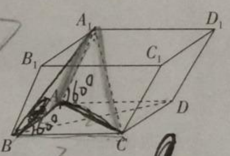
$(d+4)(d-1)=0$

19.（本小题满分 12 分）

如图，四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为菱形，$\angle ABC=\angle A_1AC=60°$，$AC\perp BA_1$.

（1）证明：$A_1A=A_1C$；

（2）若二面角$A_1-AC-B$为直二面角，求直线$BD$与平面$A_1BC$所成角的正弦值.




$3x^2+16y^2=12\cdot16$

$T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\frac{1}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$

20.（本小题满分 12 分）

设椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点$A$在抛物线$C_2:y^2=8x$的准线上，$F$是椭圆$C_1$的右焦点，且椭圆$C_1$的焦距为 2，过点$F$且斜率不为 0 的直线$l$与椭圆$C_1$交于$D,E$两点，直线$AD$和$AE$分别与直线$x=4$交于点$M,N$. $c=2$.

（1）求椭圆$C_1$的方程；

（2）$|MF|^2+|NF|^2$是否存在最小值，若存在，求出最小值；若不存在，请说明理由.

$2^nb_n=n+1$

$a_n=a_1q^{n-1}$

$a_1q^n$

$\vec{B}=(\sqrt{3}a,a,-\sqrt{3}a)$

$\vec{C}=(-\sqrt{3}a,a,1)$

$(\sqrt{3}a^2,-3a,\sqrt{3}a)$

$a^4+3a^4+a^4=7a^4$

(本小题满分 12 分)

2020 年春节期间，全国人民都在抗击“新型冠状病毒肺炎”的斗争中，在党和政府的正确领导下，在全国人民的共同努力下，中国的抗疫取得了很大的成功，基本阻断了本土病例的传播，但是全球疫情持续恶化，中国还是要坚持常态化的防控措施，为了应对常态化疫情防控，好多会议选择在网上线上召开，某大型网络公司为了给用户提供更好的在线视频会议服务，从使用该平台的用户中选择了 100 名用户进行调查研究，统计结果如下：

| 会议规模 | 小型会议 | 中型会议 | 大型会议 |
|---|---|---|---|
| 频数 | 15 | 45 | 40 |

该网络公司每销售一件“小型会议”，“中型会议”，“大型会议”产品，可以获得的销售利润分别为 150，350，550(单位：元).

(1)根据统计结果估计该网络公司每销售一件网络会议产品获得的平均销售利润；

(2)该公司为了解月广告费用 $x$(单位：万元)对月销售量 $y$(单位：百件)的影响，对近 5 个月的月广告费用 $x_i$ 和月销售量 $y_i(i=1,2,3,4,5)$ 数据做了初步处理，发现 $y=a\cdot x^b$ 可以作为月销售量 $y$(百件)关于月广告费用 $x$(万元)的回归方程，同时得到如下一些统计量的值.

| $\sum\limits_{i=1}^{5}u_i$ | $\sum\limits_{i=1}^{5}\upsilon_i$ | $\sum\limits_{i=1}^{5}(u_i-\bar{u})(\upsilon_i-\bar{\upsilon})$ | $\sum\limits_{i=1}^{5}(u_i-\bar{u})^2$ |
|---|---|---|---|
| 16.30 | 24.87 | 0.41 | 1.64 |

表中 $u_i=\ln x_i$，$\upsilon_i=\ln y_i$，$\bar{u}=\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}u_i$，$\bar{\upsilon}=\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}\upsilon_i$.

(ⅰ)建立 $y$ 关于 $x$ 的回归方程；(取 $e^{4.159}=64$)

(ⅱ)结合(1)的结果及所求的回归方程估计该公司应投入多少广告费，才能使得该产品月收益达到最大？

(收益 = 销售利润 − 广告费用)

参考公式：对于一组数据 $(u_1,\upsilon_1)$，$(u_2,\upsilon_2)$，…，$(u_n,\upsilon_n)$，其回归直线 $\upsilon=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(\upsilon_i-\bar{\upsilon})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{\upsilon}-\hat{\beta}\bar{u}$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^{2x}-\ln 2x-ax(a\in\mathbf{R})$ 在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 $y$ 轴垂直.

(1)求实数 $a$ 的值；

(2)$f(x)\geq kx+1$ 对一切 $x>0$ 恒成立，求实数 $k$ 的取值范围.

$u=2x$

$\ln u = \frac{1}{u}\ \frac{2}{2x}$

$2e-2-a=0$

$u=2x \quad u'=2$

$y=e^u \quad y'=e^u=2e^{2x}$

# 百校联盟 2021届普通高中教育教学质量监测考试

## 全国卷(新高考)　数学　参考答案

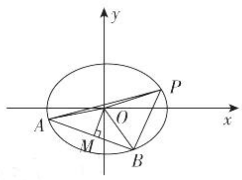
1. C 【解析】$z=\frac{2}{1+i}+2i=\frac{2(1-i)}{1^2-i^2}+2i=1-i+2i=1+i$,故 $|z|=\sqrt{2}$.

2. A 【解析】由题意得,$A=\{x|-2<x<4\}$,$N=\{x|-3<x<2\}$,则 $A\cap B=\{x|-2<x<2\}$.

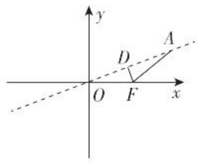
3. D 【解析】$y'=\frac{a(x-1)-ax}{(x-1)^2}=-\frac{a}{(x-1)^2}$,$y'|_{x=2}=-\frac{a}{(2-1)^2}=-a$,直线 $3x-y+b=0$ 的斜率为 3,所以 $-a=3$,故 $a=-3$,故切点为$(2,-6)$,代入切线方程为 $3x-y+b=0$ 得 $b=-12$.

4. D 【解析】依题意,$1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=a_4+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=a_6+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=\cdots=a_{58}+a_{59}=a_{60}$,则 $k=60$.

5. B 【解析】如图,圆的半径为 1,且 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$,易得 $\angle AOB=120°$. 由题意知 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-1-1\times1\times\cos120°+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\frac{1}{2}$. 设 $AB$ 的中点为 $M$,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$,且 $|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{2}$,设 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 $\theta$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}-\frac{1}{2}=2|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta-\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}\times1\times\cos\theta-\frac{1}{2}=\cos\theta-\frac{1}{2}$. 又因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的范围为 $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$.

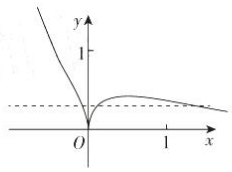



6. C 【解析】设 $D$ 为 $OA$ 中点,则 $DF\perp OA$,渐近线方程为 $y=\frac{1}{a}x$,$F(c,0)$,其中 $c^2=1^2+a^2$,则 $|DF|=\frac{c}{\sqrt{1^2+a^2}}=1$,因为 $D$ 为 $AO$ 中点,因为 $\tan\angle AOF=\frac{|DF|}{|OD|}=\frac{1}{a}$,所以 $|OD|=a$,$|AO|=2a$,则 $S_{\triangle OAF}=\frac{1}{2}\times2a\times1=2$,解得 $a=2$,离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.




7. D 【解析】在$\triangle ACB$ 中,$AB=60$,$BC=60$,$\angle ABC=60°$,所以 $AC=60$,在$\triangle CDA$ 中,$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos60°=60^2+40^2-2\times60\times40\times\frac{1}{2}=2800$,所以 $AB=20\sqrt{7}\approx53$(米).

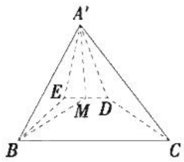
8. D 【解析】$k\cdot e^x-e^x-\sqrt{|x|}=0$,即为 $k-1=\frac{\sqrt{|x|}}{e^x}$,设 $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{e^x}(x\in\mathbf{R})$,当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{e^x}$,故 $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}$,函数在$(0,\frac{1}{2})$上单调递增,在$[\frac{1}{2},+\infty)$上单调递减,且 $f(0)=0$,$f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2e}}{2e}$,当 $x$ 趋于 $+\infty$ 时,$f(x)$ 趋于 0;当 $x<0$ 时,$f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{e^x}$,$f'(x)=-\frac{1-2x}{2\sqrt{-x}e^x}<0$,函数单调递减,此时 $f(x)$ 的取值范围为$(0,+\infty)$;如图所示画出函数图象,则 $0<k-1<f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2e}}{2e}$,故 $k\in(1,\frac{\sqrt{2e}}{2e}+1)$.



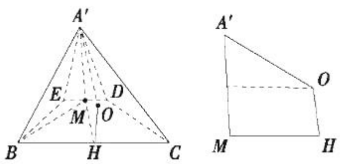

9. BC 【解析】$f(x)=2^{x-1}+2^{1-x}\geqslant2\sqrt{2^{x-1}\cdot2^{1-x}}=2$,当且仅当 $x=1$ 时取等号,故 B 正确;因为 $f(x)=2^{x-1}+2^{1-x}$,所以 $f(2-x)=2^{(2-x)-1}+2^{1-(2-x)}=2^{1-x}+2^{x-1}=f(x)$,所以 $f(x)=f(2-x)$,即 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,故 C 正确,因为函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 AD 错误.

10. ACD 【解析】因为 $S_{n+1}=2S_n+n-1$，所以 $S_{n+1}+n+1=2(S_n+n)$. 若 $a_1=1$，则 $S_1+1=2\neq0$，所以 $\frac{S_{n+1}+n+1}{S_n+n}=\frac{2S_n+2n}{S_n+n}=2$. 故数列$\{S_n+n\}$是等比数列，故 A 正确；所以 $S_n+n=2^n$，则 $S_n=2^n-n$. 当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}-1$，由 $a_1=1,a_2=1,a_3=3$ 可得 $a_1+1=2,a_2+1=2,a_3+1=4$，即$\frac{a_3+1}{a_2+1}\neq\frac{a_2+1}{a_1+1}$，故 B 错误；若 $a_1=-1$，则由 $S_{n+1}+n+1=2(S_n+n)$，得 $S_n+n=0$，此时数列$\{S_n+n\}$为等差数列，故 C 正确，此时可求得 $a_n=-1$，$a_n+1=0$，此时数列$\{a_n+1\}$为等差数列；故 D 正确.

11. BCD 【解析】根据赛制，至少需要进行四场比赛，至多需要进行五场比赛. 故 A 错；第三场比赛甲轮空，即第三场是乙和丙比赛，则第二场甲一定参赛了，说明第一场甲赢了，第二场是甲和丙比赛，甲输了，所以第三场比赛甲轮空的概率为 $P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，故 B 正确. 记事件 $A$ 为甲输，事件 $B$ 为乙输，事件 $C$ 为丙输，记事件 $M$：甲赢，记事件 $N$：丙赢，则甲赢的基本事件包括：$BCBC$，$ABCBC$，$ACBCB$，$BABCC$，$BACBC$，$BCACB$，$BCABC$，$BCBAC$，所以甲赢的概率为 $P(M)=(\frac{1}{2})^4+7\times(\frac{1}{2})^5=\frac{9}{32}$. 由对称性可知，乙赢的概率和甲赢的概率相等，所以丙赢的概率为 $P(N)=1-2\times\frac{9}{32}=\frac{7}{16}$.



12. BD 【解析】在翻折过程中，平面 $A'ED\perp$ 平面 $BCDE$ 时，四棱锥 $A'-BCDE$ 体积最大，$V=\frac{1}{3}\cdot S_{BCDE}\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt3}{4}\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{3}{8}$，故 A 错误；对于 B，当二面角 $A'-DE-B$ 为直二面角时，取 $ED$ 的中点 $M$，如图所示，可得 $A'M\perp$ 平面 $BCDE$，则 $|A'B|=\sqrt{A'M^2+BM^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt3}{2})^2+(\frac{\sqrt7}{2})^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故 B 正确；对于 C，在翻折过程中，点 $A'$ 在底面 $BCDE$ 的射影不可能在交线 $BC$ 上，因此不满足平面 $A'BC\perp$ 平面 $BCDE$，因此 C 不正确. 对于 D，平面 $A'ED\perp$ 平面 $BCDE$ 时，设外接球球心为 $O$，如图，易知 $BC$ 中点 $H$ 即为四边形 $BCDE$ 的外接圆的圆心，设球的半径为 $R$，$OH=d$，则有 $(\frac{\sqrt3}{2}-d)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2=R^2$，$d^2+1=R^2$，解得 $R^2=\frac{13}{12}$，所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{13\pi}{3}$，故 D 正确.



13. $\frac{1}{4}$ 【解析】因为 $f(-1)=2$，$f(a)+2=0$，所以 $f(a)=-2$，$f(a)=\log_2a=-2$，解得 $a=\frac{1}{4}$.

14. 1 【解析】易知抛物线方程为：$y^2=4x$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 $l:x=ty+1$，代入抛物线方程，得 $y^2-4ty-4=0$. 所以 $y_1y_2=-4$，因为圆 $E$ 的圆心为抛物线焦点 $F$. 根据抛物线的定义知，$|AF|=x_1+1$，$|BF|=x_2+1$，故 $|AM|=x_1$，$|BN|=x_2$，所以 $|AM|\cdot|BN|=x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=\frac{(y_1y_2)^2}{16}$. 因为 $y_1y_2=-4$，所以 $|AM|\cdot|BN|=1$.

15. $\frac{25\sqrt5}{324}$ 【解析】因为 $PA\perp$ 平面 $ABC$，$CM\subset$ 平面 $ABC$，所以 $PA\perp CM$，又 $CM\perp AB$，所以 $CM\perp$ 平面 $PAB$，$PB\subset$ 平面 $PAB$，所以 $CM\perp PB$，又因为 $CN\perp PB$，所以 $PB\perp$ 平面 $CMN$，又 $MN\subset$ 平面 $CMN$，所以 $PB\perp MN$，三棱锥 $B-CMN$ 体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle BMN}\cdot CM=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BN\cdot MN\cdot CM$，由 $PA=AB=2$，可知$\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，设 $BN=x$，则 $MN=x$，$BM=\sqrt2x$，在直角三角形 $ABC$ 中，又 $CM\perp AB$，所以 $CM^2=AM\cdot BM$，因为 $AB=2$，所以 $AM=2-\sqrt2x$，所以 $CM=\sqrt{\sqrt2x(2-\sqrt2x)}$，故 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BN\cdot MN\cdot CM=\frac{1}{6}x^2\sqrt{\sqrt2x(2-\sqrt2x)}=\frac{1}{6}x^2\sqrt{2x(\sqrt2-x)}=\frac{1}{6}\sqrt{2x^5(\sqrt2-x)}=\frac{1}{6}\sqrt{2(\sqrt2x^5-x^6)}$ $(0<x<\sqrt2)$，令 $u=\sqrt2x^5-$

$x^6$，则 $u'=5\sqrt{2}x^4-6x^5=x^4(5\sqrt{2}-6x)$，令 $u'=0$，则 $x=\frac{5\sqrt{2}}{6}$，当 $0<x<\frac{5\sqrt{2}}{6}$ 时，$u'>0$，当 $\frac{5\sqrt{2}}{6}<x<\sqrt{2}$ 时，$u'<0$，故当 $x=\frac{5\sqrt{2}}{6}$ 时，$u=\sqrt{2}x^5-x^6$ 取最大值，此时 $V$ 也取最大值，最大值为 $V_{\max}=\frac{1}{6}(\frac{5\sqrt{2}}{6})^2\sqrt{\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{6}(2-\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{6})}=\frac{1}{6}\times\frac{25}{18}\times\sqrt{\frac{5}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}\times\frac{25}{18}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{25\sqrt{5}}{324}$.

16. $\pi$，$\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 【解析】由题 $f(x)=\sin 2x\cdot|\sin x|$，则 $f(x+\pi)=\sin[2(x+\pi)]\cdot|\sin(x+\pi)|=\sin 2x\cdot|-\sin x|=f(x)$，从而 $\pi$ 是函数的周期. 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$f(x)=\sin 2x\cdot\sin x$，则 $f'(x)=6\sin x(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{3})(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{3})$，设 $0<\alpha<\beta<\pi$，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则当 $0<x<\alpha$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $\alpha<x<\beta$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $\beta<x<\pi$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，又 $f(0)=f(\pi)=0$，所以函数的最小值正周期是 $\pi$，最大值为 $f(\alpha)=\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

17.【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，那么由 $\sin B-\sin C=\sin(A-C)$，

可得 $\sin(A+C)-\sin C=\sin(A-C)$，$\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C=\sin A\cos C-\cos A\sin C$，

$\therefore 2\cos A\sin C=\sin C\neq 0$，$\therefore\cos A=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中，$A=\frac{\pi}{3}$. …… 2 分

补充的条件为②③时，三角形存在. 补充的条件①②或①③时，三角形不存在，

选理由如下：

若补充的条件中有①.

因为 $\cos B=-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}$，且 $B\in(0,\pi)$，所以 $B>\frac{2}{3}\pi$.

所以 $A+B>\pi$，矛盾.

所以 $\triangle ABC$ 不能补充的条件①，只能补充的条件为②③，…… 5 分

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，…… 6 分

所以 $7^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times\frac{1}{2}$.

解得 $c=8$，或 $c=-5$（舍）. …… 8 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=6\sqrt{3}$. …… 10 分

18.【解析】(1) $\because a_2=3$，$\therefore a_1+d=3$①，…… 1 分

$\because a_3^2=2a_7$，$\therefore(a_1+2d)^2=2(a_1+6d)$②，…… 2 分

由①②得：$\begin{cases}d=1\\a_1=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}d=3\\a_1=0\end{cases}$，…… 4 分

当 $\begin{cases}d=1\\a_1=2\end{cases}$ 时，$a_n=n+1$.

当 $\begin{cases}d=3\\a_1=0\end{cases}$ 时，$a_n=3(n-1)$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1$ 或 $a_n=3(n-1)$. …… 6 分

(2) $\because a_1>0$，$\therefore a_n=n+1$，

$2b_1+2^2b_2+2^3b_3+\cdots+2^nb_n=n+1$①，

$2b_1+2^2b_2+2^3b_3+\cdots+2^{n-1}b_{n-1}=n(n\geqslant 2)$②，

①－②得：$b_n=\dfrac{1}{2^n},n\geqslant 2$，…………………………………………………………………… 8 分

$n=1$ 时，$b_1=1$ 不满足上式，

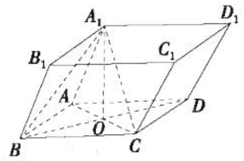
所以 $b_n=\begin{cases}1,n=1\\ \dfrac{1}{2^n},n\geqslant 2\end{cases}$，…………………………………………………………………… 9 分

所以 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1+\dfrac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2^n}$，……………… 11 分

当 $n=1$ 时，$T_1=1$ 满足上式，

所以 $T_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2^n}$. …………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)设 $BD$ 交 $AC$ 于点 $O$，连接 $A_1O$，因为底面 $ABCD$ 为菱形，




所以 $AC\perp BD$，且 $O$ 为 $AC$ 及 $BD$ 的中点

因为 $AC\perp BA_1$，$BD\cap BA_1=B$

所以 $AC\perp$ 平面 $A_1BO$. …………………………………………………… 3 分

因为 $A_1O\subset$ 平面 $A_1BO$，所以 $A_1O\perp AC$，…………………………………… 4 分

又 $AO=CO$，所以 $A_1A=A_1C$. ……………………………………………… 5 分

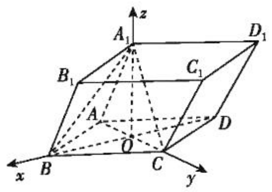
(2)因为 $A_1O\perp AC$，$BO\perp AC$，

所以 $\angle A_1OB$ 即为二面角 $A_1-AC-B$ 的平面角，

因为二面角 $A_1-AC-B$ 为直二面角，所以 $A_1O\perp OB$，……………………………………… 7 分

从而 $OB,OC,OA_1$ 两两垂直，

如图，以 $O$ 为原点，$OB,OC,OA_1$ 所在直线分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴，建立如图所示的坐标系，




因为底面 $ABCD$ 为菱形，$A_1A=A_1C$，$\angle ABC=\angle A_1AC=60^\circ$，

所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1AC$ 均为等边三角形，

设 $AB=2$，则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$D(-\sqrt{3},0,0)$.

$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BA_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{3},0,0)$，……………………………… 8 分

设平面 $A_1BC$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

可得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ -\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

不妨令 $x=1$，则 $y=\sqrt{3}$，$z=1$，可取 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$，…………………………………… 10 分

设直线 $BD$ 与平面 $A_1BC$ 所成角为 $\theta$

则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 $BD$ 与平面 $A_1BC$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)抛物线 $C_2:y^2=8x$ 的准线为 $x=-2$，

椭圆左顶点 $A$ 在抛物线 $C_2:y^2=8x$ 的准线上，所以 $A(-2,0)$，$a=2$，…………………………… 1 分

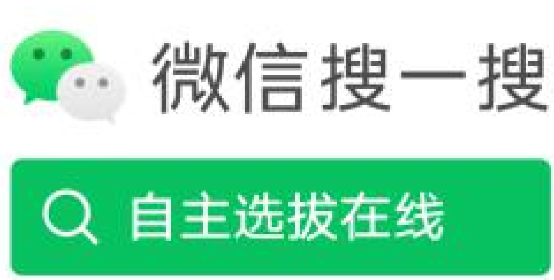
椭圆 $C_1$ 的焦距为 2，所以 $2c=2$，所以 $c=1$，……………………………………………………… 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

**关于我们**

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。




关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》