学校

年班

考号

姓名

（装订线内不要答题）

装 订 线

2022~2023 学年度第二学期期末考试

高二数学

注意事项：

1.本试卷考试时间为 120 分钟，满分 150 分。

2.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

3.答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答题标号；答非选择题时，将答案写在答题卡上相应区域内，超出答题区域或写在本试卷上无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

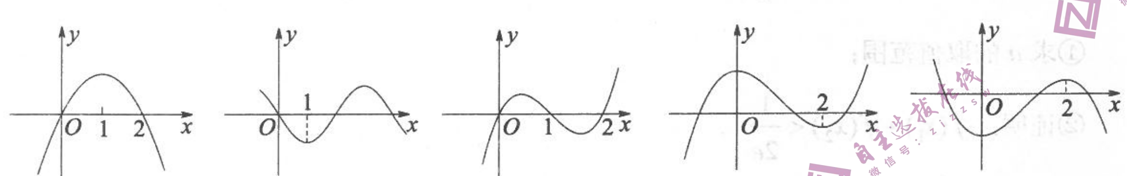
1. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=3$，$a_7=27$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差为（　　）

A. 2　　B. 6　　C. 10　　D. 14

2. 一箱产品中有 6 件正品和 2 件次品. 每次从中随机抽取 1 件进行检测，抽出的产品不再放回. 已知前两次检测的产品均是正品，则第三次检测的产品是正品的概率为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{64}{125}$　　D. $\frac{7}{15}$

3. 已知函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的图象可能是（　　）



第 3 题图　　A　　B　　C　　D

4. 某商场为了了解毛衣的月销售量 y（件）与月平均气温 x（℃）之间的关系，随机统计了某 4 个月的月销售量与当月平均气温，其数据如表：

月平均气温 x（℃）	17	13	8	2
月销售量 y（件）	24	33	40	55

由表中数据算出线性回归方程 $\hat{y}=bx+a$ 中的 $b=-2$，气象部门预测下个月的平均气温约为 8℃，据此估计该商场下个月毛衣销售量约为（　　）件.

A. 40　　B. 42　　C. 46　　D. 48

5. 康托（Cantor）是十九世纪末二十世纪初德国伟大的数学家，他创立的集合论奠定了现代数学的基础. 著名的“康托三分集”是数学理性思维的产物，具有典型的分形特征，其操作过程如下：将闭区间 $[0,1]$ 均分为三段，去掉中间的区间段 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，记为第一次操作；再将剩下的两个区间 $[0,\frac{1}{3}]$，$[\frac{2}{3},1]$ 分别均分为三段，并各自去掉中间的区间段，记为第二次操作；…，如此这样，每次在上一次操作的基础上，将剩下的各个区间分别均分为三段，同样各自去掉中间的区间段. 操作过程不断地进行下去，以至无穷，剩下的区间集合即是“康托三分集”. 若使“康托三分集”的各区间长度之和小于 $\frac{1}{20}$，则需要操作的次数 n 的最小值为（　　）

（参考数据：$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

6. 已知 $a=\sqrt{2}$，$b=\log_2 3$，$c=e^2$，设曲线 $y=\ln x^3-x^3$ 在 $x=k(k>0)$ 处的切线斜率为 $f(k)$，则（　　）

A. $f(c)<f(b)<f(a)$

B. $f(a)<f(c)<f(b)$

C. $f(c)<f(a)<f(b)$

D. $f(a)<f(b)<f(c)$

7. 某班举行航空知识闯关活动，共设置 A，B，C 三个问题. 答题者可自行决定答三道题的顺序. 甲有 60% 的可能答对问题 A，80% 的可能答对问题 B，50% 的可能答对问题 C. 记答题者连续答对两题的概率为 p，要使得 p 最大，他应该先回答（　　）

A. 问题 A　　B. 问题 B　　C. 问题 C　　D. 问题 A，B 和 C 都可以

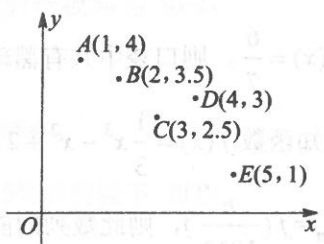
8. 若过点 $P(t,0)$ 可以作曲线 $y=(1-x)e^x$ 的两条切线，切点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 y_1y_2 的取值范围是（　　）

A. $(0,4e^{-3})$　　B. $(-\infty,0)\cup(0,4e^{-3})$

C. $(-\infty,4e^{-2})$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,4e^{-2})$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 5 个成对数据(x, y)的散点图如下，且 y 与 x 线性相关，若去掉点 $D(4, 3)$，则下列说法正确的是（　　）



第 9 题图

A. 变量 x 与变量 y 呈负相关

B. 变量 x 与变量 y 的线性相关关系变强

C. 残差平方和变小

D. 样本相关系数 r 变大

10. 已知递减的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$S_6=S_8$，则（　　）

A. $a_7>0$　　B. $S_{13}<0$　　C. $S_{15}<0$　　D. S_7 最大

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}+\cos x$，$x\in(0,\pi)$，则（　　）

A. $f(x)$有一个零点　　B. $f(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$上单调递减

C. $f(x)$有一个极值点　　D. 若 $f(x_1)=f(x_2)=a$，则 $x_1+x_2<\pi$

12. 一种疾病需要通过核酸检测来确定是否患病，检测结果呈阴性即没患病，呈阳性即为患病，已知 7 人中有 1 人患有这种疾病，先任取 4 人，将他们的核酸采样混在一起检测．若结果呈阳性，则表明患病者为这 4 人中的 1 人，然后再逐个检测，直到能确定患病者为止；若结果呈阴性，则在另外 3 人中逐个检测，直到能确定患病者为止．则（　　）

A. 最多需要检测 4 次可确定患病者

B. 第 2 次检测后就可确定患病者的概率为$\dfrac{2}{7}$

C. 第 3 次检测后就可确定患病者的概率为$\dfrac{2}{7}$

D. 检测次数的期望为$\dfrac{22}{7}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=3x^2+1$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$________________.

14. 某城市每年6月份的平均气温 t 近似服从 $N(28,\sigma^2)$，若 $P(28\le t\le 32)=0.2$，则可估计该城市6月份平均气温低于24摄氏度的天数为________________.

15. 设口袋中有白球3个，黑球若干个，从中任取2个球，设抽到的球中白球个数为 x 个，且 $E(x)=\frac{6}{7}$，则口袋中共有黑球________________个.

16. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$，则 $f(2.7)+f(-0.7)=$________________；设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(\frac{n}{1012})$，则此数列的前2023项的和为________________.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分10分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$.

（1）证明：$\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是等比数列；

（2）证明：存在两个等比数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n+c_n$ 成立.

18.（本题满分12分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$.

（1）若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，求 a 的值；

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性.

19.（本题满分12分）

青少年时期是视觉发育的敏感期与关键期，这个阶段的视觉发育容易受环境因素影响，某校为研究学生每天使用手机时长与近视率的关系，从全校学生中随机抽取600名学生进行不记名问卷调查，得到如下数据：有20%的学生每天使用手机超过1 h，这些人的近视率为50%；每天使用手机不超过1 h的学生的近视率为37.5%.

（1）若从该校学生中随机抽取一人，请根据以上数据估计该同学近视的概率；

（2）请完成2×2列联表. 并根据调查数据回答：在犯错误的概率不超过5%的前提下. 可以认为该校学生每天使用手机时长与近视有关吗？

视力	每天使用手机时长		合计
	超过1 h	不超过1 h	
近视			
不近视			
合计			600

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

下表是 χ^2 独立性检验中几个常用的小概率值和相应的临界值：

$\alpha=P(\chi^2\ge k)$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20.（本题满分12分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>0$，且满足 $a_1+a_2=6a_3$，$a_4=4a_3^2$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\in N^*$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\begin{cases}\dfrac{3b_n+8}{b_nb_{n+2}}\cdot a_{n+2}, & n\text{为奇数}\\ a_nb_n, & n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

21.（本题满分 12 分）

某商场为庆祝六一儿童节，举办了一场赢取小熊挂件的“定点投篮”活动，方案如下：

方案一：共投 9 次，每次投中得 1 分，否则得 0 分，累计所得分数记为 Y；

方案二：共进行三轮投篮，每轮最多投三次，直到投中两球为止得 3 分，否则得 0 分，三轮累计所得分数记为 X.

累计所得分数越多，所获得奖品越多. 现在甲准备参加这个“定点投篮”活动，已知甲每次投篮的命中率为 $p(0<p<1)$，每次投篮互不影响.

（1）若 $p=\frac{1}{2}$，甲选择方案二，求第一轮投篮结束时，甲得 3 分的概率；

（2）以最终累计得分的期望值为决策依据，甲在方案一，方案二之中选其一，应选择哪个方案？

22.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{a}{2}x^2-x-x\ln x(a\in R)$.

（1）若 $a=2$，求方程 $f'(x)=0$ 的解集；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点且有两个极值点，记两个极值点为 x_1，x_2，

①求 a 的取值范围；

②证明：$f(x_1)+f(x_2)<\frac{1}{2e}$.

装 订 线 内 不 要 答 题