北京大学 2017 年生命科学冬令营数学答案

参考答案与解析

1．D．

根据题意，有$x=\dfrac{x+3}{x+4}$或$x=-\dfrac{x+3}{x+4}$，即$x^2+3x-3=0$，或$x^2+5x+3=0$，于是题中方程的所有解之和为$(-3)+(-5)=-8$．

2．B．

注　此题来源于2002年全国卷的第5题：

设集合$M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{4}k+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则（　　）

A．$M=N$

B．$M\subsetneqq N$

C．$M\supsetneqq N$

D．$M\cap N=\varnothing$

3．A．

设$f(x)=x^2-(3a+2)x+2a-1$，则问题等价于$f(3)<0$，解得$a>\dfrac{2}{7}$．

4．D．

设$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$，则

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{1}{k^3}.$$

若$a-b=0$，则有$a=b=c$，于是$k=2$，所求代数式的值为$\dfrac{1}{8}$；

若$a-b\neq 0$，则根据合分比定理，有

$$k=\frac{(b+c)-(c+a)}{a-b}=-1,$$

此时$a+b+c=0$，所求代数式的值为-1．

5．C．

显然原式等于$\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$，而$\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$，于是$\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$．

6．B．

设圆锥的底面半径为r，母线长为l，则有

$$\begin{cases}\pi l = 2\pi r,\\ \pi r^2 = 10,\end{cases}$$

从而此圆锥的侧面积为

$$\frac{1}{2}\pi l^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4r^2 = 20.$$

7．A．

令$f(x) = x|x-a| + \frac{3}{2}$．

情形一 若$1 \leqslant a \leqslant 2$，则

$$f(x)_{\min} = f(a) = \frac{3}{2},$$

故此时$1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$．

情形二 若$a > 2$，则$f(x) = x(a-x) + \frac{3}{2}$，此时原问题等价于

$$\begin{cases}f(1) \geqslant a,\\ f(2) \geqslant a,\end{cases}$$

解得$a \geqslant \frac{5}{2}$．

综上所述，实数a的取值范围是$\left[1, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$．

8．D．

由题意知p是q的充分不必要条件．$p:-2\leqslant x\leqslant 10$，设$f(x)=x^2-2x+1-m^2$，则$f(-2)\leqslant 0$，$f(10)\leqslant 0$且$f(-2)$和$f(10)$不同时为0，解得$m\geqslant 9$．

9．A．

由题意，设$\arg z=\alpha$，则$\tan\alpha=\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}$，$\varphi$的终边与$\alpha-\dfrac{3\pi}{4}$的终边重合，所以

$$\begin{aligned}\tan\varphi&=\tan\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)\\&=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}\\&=\frac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}.\end{aligned}$$

10．B．

方法一　根据题意，当$x=-1$时，有$f(x)=1$；当$x\neq -1$时，有

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1+\dfrac{1}{x+1}-1},$$

于是$f(x)$的最大值为$\dfrac{5}{3}$，最小值为-1．

方法二　设$y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$，则有

$$(y-1)x^2+(y+1)x+y+1=0,$$

进而

$$\begin{aligned}\Delta &=(y+1)^2-4(y-1)(y+1)\\&=(y+1)(-3y+5)\geqslant 0,\end{aligned}$$

于是y的最大值为$\frac{5}{3}$，最小值为-1．

11．C．

由题意，

$$\begin{aligned}f(2016,2015)&=f(2016,1)+2\cdot 2014\\&=f(1,1)\cdot 2^{2015}+4028\\&=2^{2015}+4028.\end{aligned}$$

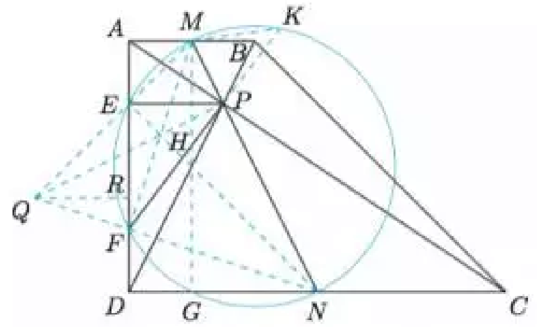
12．B．

注意$\neg E$是A的充分条件，于是有$\neg E\Rightarrow A\Rightarrow B\Leftrightarrow C\Rightarrow D$．

13．B．

方法一

如图，直角梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，$AD=2$，$AB=2a$，$CD=2b$．$M,N$分别为线段$AB,CD$的中点，对角线$AC$与$BD$交于点$P$．以$MN$为直径的圆与线段$AD$交于$E,F$两点，与线段$CD$交于$N,G$两点，连接$MG$．延长$FP$，交圆于点$K$，连接$MK$．设直线$ME$与$NF$交于点$Q$，直线$MF$与$NE$交于点$H$，作$QR\perp AD$于$R$．



易知，M,P,N三点共线．因为

$$\frac{ME}{EQ}\cdot\frac{QF}{FN}\cdot\frac{NP}{PM}=\frac{a}{QR}\cdot\frac{QR}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,$$

故直线MF,NE,QP交于一点H，而H是$\triangle QMN$的垂心，所以

$$\angle EFM=\angle ENM=\angle PFH,$$

因而$\overset{\frown}{ME}=\overset{\frown}{MK}$，进而有$PE=PK$．因为

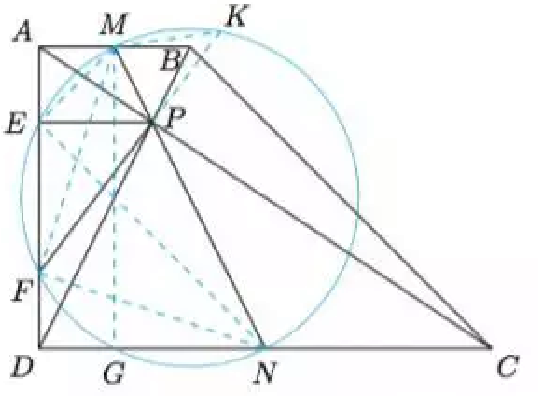
$$\begin{aligned}\overset{\frown}{FK}&=\overset{\frown}{ME}+\overset{\frown}{MK}+\overset{\frown}{EF}\\&=\overset{\frown}{ME}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FG}\\&=\overset{\frown}{MG},\end{aligned}$$

所以

$$PE+PF=PK+PF=FK=MG=AD=2.$$

方法二

如图，直角梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，$AD=2$．$M,N$分别为线段$AB,CD$的中点，对角线$AC$与$BD$交于点$P$．以$MN$为直径的圆与线段$AD$交于$E,F$两点，与线段$CD$交于$N,G$两点，连接$MG$．延长$FP$，交圆于点$K$，连接$MK$．连接$ME$与$NF$．%设直线$ME$与$NF$交于点$Q$，直线$MF$与$NE$交于点$H$，作$QR\perp AD$于$R$．



因为

$$\frac{PM}{PN}=\frac{S_{\triangle PME}}{S_{\triangle PNE}}=\frac{EM\cdot\sin\angle MEP}{EN\cdot\sin\angle NEP},$$

而

$$\frac{PM}{PN}=\frac{AM}{DN}=\frac{EM\cdot\sin\angle MEA}{EN\cdot\sin\angle NED},$$

所以

$$\frac{\sin\angle MEP}{\sin\angle NEP}=\frac{\sin\angle MEA}{\sin\angle NED}.$$

又因为$\angle MEP+\angle NEP=90^\circ$，$\angle MEA+\angle NED=90^\circ$，所以

$$\angle MEP=\angle MEA,\ \angle NEP=\angle NED,$$

同理，

$$\angle NFP=\angle NFD,\ \angle MFP=\angle MFA,$$

故$\widehat{ME}=\widehat{MK}$，进而有$ME=MK$，$PE=PK$．又因为$\widehat{KF}=\widehat{MG}$，所以

$$PE+PF=PK+PF=FK=MG=AD=2.$$

注　若设点M,N是以点P为焦点，直线AD为准线的双曲线上的两点，则此题相当于证明了双曲线的一条性质：若以双曲线的一条焦点弦MN为直径的圆与对应准线相交于两点E,F，则焦点P到两个交点E,F的距离之和等于焦点弦在准线上的投影长．抛物线也有类似的性质．

14．D．

$\mathrm{C}_{12}^{1}+\mathrm{C}_{12}^{2}=78$．

15．C．

令$t_i=x_i-1>0\,(i=1,2,\cdots,2016)$，则

$$\begin{aligned}\ln x_1\ln x_{2016}&=\ln(1+t_1)\ln(1+t_{2016})\\&<t_1\cdot t_{2016}\leqslant t_1\cdot\frac{2-t_1}{2015}\\&\leqslant\frac{1}{2015}.\end{aligned}$$

16．A．

由半角公式得

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha&=\frac{3}{2}\\&-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha),\end{aligned}$$

记$A=\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha$，则有

$$\begin{aligned}2\sin 2\alpha\cdot A&=\sin 4\alpha+(\sin 6\alpha-\sin 2\alpha)\\&+(\sin 8\alpha-\sin 4\alpha).\end{aligned}$$

而$\sin 6\alpha+\sin 8\alpha=0$，所以

$$2\sin 2\alpha\cdot A=-\sin 2\alpha\Rightarrow A=-\frac{1}{2},$$

从而得所求代数式的值为$\frac{7}{4}$．

17．C．

分别考虑直线$y=(a-1)x-1$与二次函数$y=x^2-ax-1$的草图，因为二次函数一定存在一个正零点与一个负零点，所以直线斜率为正，且直线与x轴的交点必与二次函数的正零点重合，即$\frac{1}{a-1}$是方程$x^2-ax-1=0$的解，代入解得$a=\frac{3}{2}$．

也可以考虑不等式，显然有$a>1$，题中不等式可以变形为

$$\left(x-\frac{1}{a-1}\right)(x-x_1)(x-x_2)\geqslant 0,$$

其中x_1,x_2是方程$x^2-ax-1=0$的两根，因为$x_1x_2<0$，不妨设$x_1<x_2$，就有$x_1<0<x_2$．

而$x>0$，所以$x-x_1>0$恒成立，从而不等式

$$\left(x-\frac{1}{a-1}\right)(x-x_2)\geqslant 0$$

对$x>0$恒成立，因为$\dfrac{1}{a-1}>0, x_2>0$，所以只能有$\dfrac{1}{a-1}=x_2$，以下同上．

18．D．

因为

$$\begin{aligned}\sin\beta=&\sin(\alpha+\beta-\alpha)\\=&\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,\end{aligned}$$

所以由题中条件得$\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$．从而解得

$$\begin{aligned}\tan\beta=&\frac{2\tan\alpha}{3\tan^2\alpha+1}\\=&\frac{2}{3\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}}\\\leqslant&\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

即$\tan\beta$有最大值$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，当$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{6}$时取到．$\tan\beta$取不到最小值，当$\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan\beta\to 0$．

19．B．

题中等式可以变形为

$$\sqrt{\frac{c-1}{c^2}}+\sqrt{\frac{b-1}{b^2}}+\sqrt{\frac{a-1}{a^2}}\leqslant\frac{3}{2},$$

而$\sqrt{\dfrac{c-1}{c^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2}\right)^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以只能有

$$\sqrt{\frac{c-1}{c^2}}=\sqrt{\frac{b-1}{b^2}}=\sqrt{\frac{a-1}{a^2}}=\frac{1}{2},$$

解得$a=b=c=2$．

也可以换元，令

$$x=\sqrt{a-1}, y=\sqrt{b-1}, z=\sqrt{c-1},$$

则有$x,y,z\geqslant 0$且题中条件变为

$$\sum_{cyc}2z(x^2+1)(y^2+1)=3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)$$

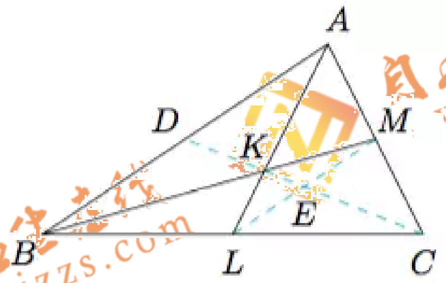
$_{cyc}$

$$\leqslant\sum_{cyc}(z^2+1)(x^2+1)(y^2+1)$$
$$=3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1).$$

所以等号必须成立，有$x=y=z=1$，从而$a=b=c=2$．

20．C．

连结CK并延长，使它交AB边于点D，连结LM，交CD于点E，如图：



由题意知K是$\triangle ABC$的重心，所以D为AB的中点，E为CD的中点，也为LM的中点，且K为CD的靠近D的三等分点．记$KE=m$，则$CD=6m,CE=3m$．

因为K,L,C,M四点共圆，由相交弦定理知

$$ME\cdot LE=KE\cdot CE=3m^2,$$

解得$ME=LE=\sqrt{3}m$．从而有

$$\frac{AB}{KC}=\frac{2LM}{m+3m}=\frac{4\sqrt{3}m}{4m}=\sqrt{3}.$$