

二. 选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 对两个变量 y 和 x 进行回归分析, 得到一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_{10}, y_{10})$. 则下列结论正确的是 ()

- A. 若其经验回归方程为 $\hat{y} = 0.8x + 1$, 当解释变量 x 每增加 1 个单位, 预报变量 \hat{y} 一定增加 0.8 个单位
- B. 若其经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 必过点 $(3, 2.25)$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{10} + 7.5$
- C. 若根据这组数据得到样本相关系数 $|r| \approx 0.98$, 则说明样本数据的线性相关程度较强
- D. 若用相关指数 R^2 来刻画回归效果, 回归模型 1 的相关指数 $R_1^2 = 0.32$, 回归模型 2 的相关指数 $R_2^2 = 0.68$, 则模型 1 的拟合效果更好

10. 为了得到函数 $y = \ln(ex)$ 的图象, 可将函数 $y = \ln x$ 的图象 ()

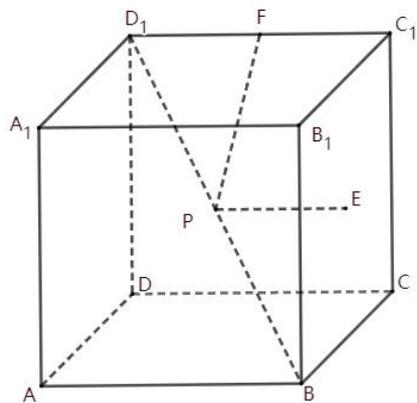
- A. 纵坐标不变, 横坐标伸长为原来的 e 倍
- B. 向上平移一个单位长度
- C. 纵坐标不变, 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{e}$ 倍
- D. 向下平移一个单位长度

11. 已知点 O 为坐标原点, 直线 $y = x - 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, 则 ()

- A. $|AB| = 8$
- B. $OA \perp OB$
- C. $\triangle AOB$ 的面积为 $2\sqrt{2}$
- D. 线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 2

12. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为侧面 BCC_1B_1 的中心, F 是棱 C_1D_1 的中点, 若点 P 为线段 BD_1 上的动点, N 为 $ABCD$ 所在平面内的动点, 则下列说法正确的是 ()

- A. $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 $\frac{1}{48}$
- B. 若 $BP = 2PD_1$, 则平面 PAC 截正方体所得的面积为 $\frac{9}{8}$
- C. 若 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 N 点的轨迹为双曲线的一部分
- D. 若正方体绕 BD_1 旋转 θ 角度后与其自身重合, 则 θ 的最小值是 $\frac{2\pi}{3}$



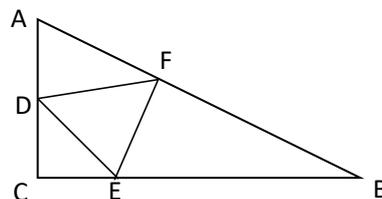
三. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = x \ln x - x$, 则函数 $f(x)$ 的零点个数为 _____ 个.

14. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b - c = \frac{1}{4}a$, $2\sin B = 3\sin C$, 则 $\cos A$ 的值为 _____.

15. S_n 是公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若数列 $\{\sqrt{S_n + 1}\}$ 也是等差数列, 则 $a_1 =$ _____.

16. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的内接正 $\triangle DEF$ 边长的最小值为 _____.



四. 解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分.

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2^n + 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 保持数列 $\{a_n\}$ 中各项先后顺序不变, 在 a_k 与 a_{k+1} 之间插入 k 个 1, 使它们和原数列的项构成一个新的数列 $\{b_n\}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_{50} 的值.

18. (12 分)

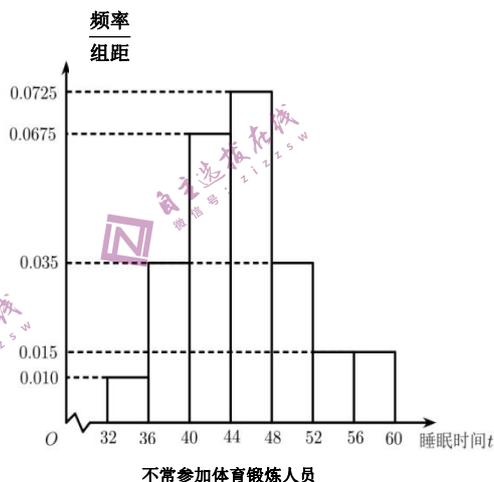
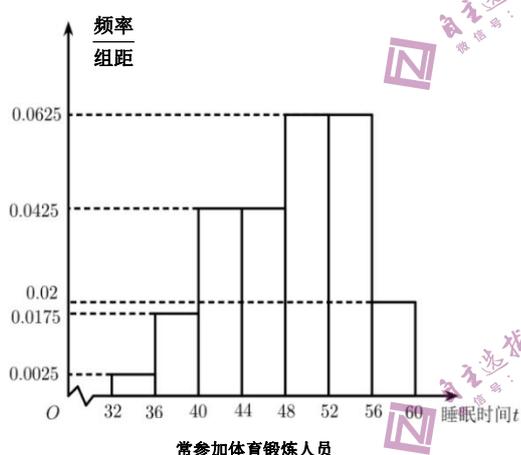
在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , D 为边 BC 上一点, 若 $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

(1) 证明: AD 平分 $\angle BAC$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $AB = 7, AC = 8, \angle C = \frac{\pi}{3}$, 求 AD 的长.

19. (12 分)

每年的 3 月 21 日是世界睡眠日, 保持身体健康的重要标志之一就是有良好的睡眠, 某机构为了调查参加体育锻炼对睡眠的影响, 从辖区内同一年龄层次的常参加体育锻炼和不常参加体育锻炼的人中, 各抽取了 100 人, 通过问询的方式得到他们在一周内的睡眠时间 (单位: 小时), 并绘制出如下频率分布直方图.



(1) 若每周的睡眠时间不少于 44 小时的列为“睡眠足”, 每周的睡眠时间在 44 小时以下的列为“睡眠不足”, 请根据已知条件完成下列 2×2 列联表, 并依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 分析“睡眠足”与“常参加体育锻炼”是否有关?

	睡眠足	睡眠不足	总计
常参加体育锻炼人员			
不常参加体育锻炼人员			
总计			

(2) 现从常参加体育锻炼的样本人群中按睡眠是否充足来采用分层抽样法抽取 8 人做进一步访谈, 然后从这 8 人中随机抽取 2 人填写调查问卷, 记抽取的两人中睡眠足的人数为 X , 求 X 的分布列及数学期望;

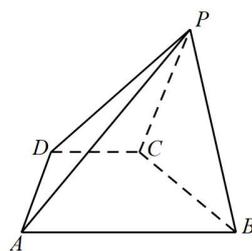
(3) 用此样本的频率估计总体的概率，从该辖区随机调查常参加体育锻炼的 3 名人员，设调查的 3 人中睡眠足的人数为 Y ，求 Y 的方差.

参考公式： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.010	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	10.828

20. (12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \parallel CD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = 2CD = 2$ ， $AD = \sqrt{3}$ ， $PA = \sqrt{6}$ ，侧面 PBC 为等边三角形.



(1) 求证：平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 在棱 PD 上是否存在点 Q ，使得二面角 $A-BC-Q$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$ ？若存在，求出 $\frac{PQ}{PD}$ 的值；若不存在，请说明理由.

21. (12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左右顶点为 A, B ，直线 $l: x = 1$ 已知 O 为坐标原点，圆 G 过点 O, B 交直线 l 于 M, N 两点，直线 AM, AN 分别交椭圆于 P, Q .

(1) 记直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，求 $k_1 \cdot k_2$ 的值；

(2) 证明直线 PQ 过定点，并求该定点坐标.

22. (12 分)

已知 $f(x) = e^x - ax$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a = e$ 时 (e 为自然对数的底数)，若对于 $\forall x \in (0, +\infty)$ ，不等式 $f(x) \geq t(x^2 - x - x \ln x)$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.