

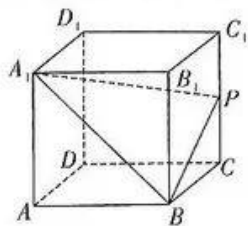


4. 最早的测雨器记载见于南宋数学家秦九韶所著的《数书九章》(1247年). 该书第二章为“天时类”, 收录了有关降水量计算的四个例子, 分别是“天池测雨”、“圆罍测雨”、“峻积验雪”和“竹器验雪”. 其中“天池测雨”法是下雨时用一个圆台形的天池盆收集雨水. 已知天池盆盆口直径为二尺八寸, 盆底直径为一尺二寸, 盆深一尺八寸. 当盆中积水深九寸(注: 1尺=10寸)时, 平地的降雨量是
- A. 9寸 B. 6寸 C. 4寸 D. 3寸
5. 为调查某地区中学生每天睡眠时间, 采用样本量比例分配的分层随机抽样, 现抽取初中生 800 人, 其每天睡眠时间均值为 9 小时, 方差为 1, 抽取高中生 1200 人, 其每天睡眠时间均值为 8 小时, 方差为 0.5, 则估计该地区中学生每天睡眠时间的方差为
- A. 0.94 B. 0.96 C. 0.75 D. 0.78
6. 已知 $2^m = 3^n = 6$, 则 m, n 不可能满足的关系是
- A. $m+n > 4$ B. $mn > 4$
C. $m^2 + n^2 < 8$ D. $(m-1)^2 + (n-1)^2 > 2$
7. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin(2\alpha + \beta) = 2\sin \beta$, 则 $\tan \beta$ 的最大值为
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 已知 O 为坐标原点, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 点 $P(x_1, y_1)$ 是 C 的右支上异于顶点的一点, 过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 的平分线的垂线, 垂足是 M , $|\overrightarrow{MO}| = \sqrt{2}$. 若双曲线 C 上一点 T 满足 $\overrightarrow{F_1T} \cdot \overrightarrow{F_2T} = 5$, 则点 T 到双曲线 C 的两条渐近线距离之和为
- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{6}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 其共轭复数为 \bar{z} , 则下列结果为实数的是
- A. z^2 B. $|z^2|$
C. $(z+1)(\bar{z}+1)$ D. $(z-\bar{z}) \cdot i^{2023}$
10. 平面内到两定点距离之积为常数的点的轨迹称为卡西尼卵形线, 它是 1675 年卡西尼在研究土星及其卫星的运行规律时发现的. 已知在平面直角坐标系 xOy 中, $M(-2, 0), N(2, 0)$, 动点 P 满足 $|PM| \cdot |PN| = 5$, 则下列结论正确的是
- A. 点 P 的横坐标的取值范围是 $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$
B. $|OP|$ 的取值范围是 $[1, 3]$
C. $\triangle PMN$ 面积的最大值为 $\frac{5}{2}$
D. $|PM| + |PN|$ 的取值范围是 $[2\sqrt{5}, 5]$

11. 已知函数 $f(x) = x \sin x$, 则下列说法正确的有
- A. $f(x)$ 是偶函数
 B. $f(x)$ 是周期函数
 C. 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上, $f(x)$ 有且只有一个极值点
 D. 过 $(0, 0)$ 作 $y = f(x)$ 的切线, 有无数条
12. 在直平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = AD = AA_1 = 2$, P 为 CC_1 的中点, 点 Q 满足 $\overrightarrow{DQ} = \lambda \overrightarrow{DC} + \mu \overrightarrow{DD_1}$ ($\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$). 下列结论正确的是

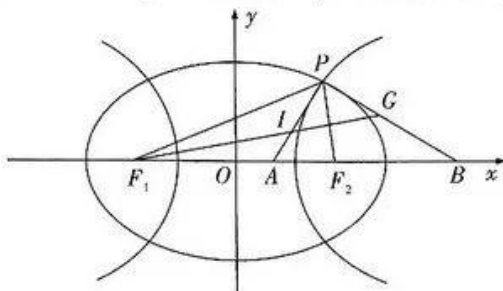


- A. 若 $\lambda + \mu = 1$, 则四面体 A_1BPQ 的体积为定值
 B. 若 $AQ \parallel$ 平面 A_1BP , 则 AQ 的最小值为 $\sqrt{5}$
 C. 若 $\triangle A_1BQ$ 的外心为 E , 则 $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{A_1E}$ 为定值 2
 D. 若 $A_1Q = \sqrt{7}$, 则点 Q 的轨迹长度为 $\frac{2\pi}{3}$

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $a = (1, 2), b = (2, t)$, 若 $|a + b| = |a - b|$, 则 t 的值为 _____.
14. 已知 $a > 0$, 若 $(x + a)^3 = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2 + \dots + a_n(x + 1)^n$, 且 $a_3 = 126$, 则 $a =$ _____.
15. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$) 的一条对称轴为 $x = -\frac{\pi}{6}$, 且 $f(x)$ 在 $(\pi, \frac{4\pi}{3})$ 上单调, 则 ω 的最大值为 _____.
16. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2, b_2 > 0)$ 有公共焦点 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$, 椭圆的离心率为 e_1 , 双曲线的离心率为 e_2 , 点 P 为两曲线的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} =$ _____; 若 I 为 $\triangle F_1PF_2$ 的内心, F_1, I, G 三点共线, $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{IP} = 0$, x 轴上点 A, B 满足 $\overrightarrow{AI} = \lambda \overrightarrow{IP}, \overrightarrow{BG} = \mu \overrightarrow{GP}$, 则 $\lambda^2 + \mu^2$ 的最小值为 _____.



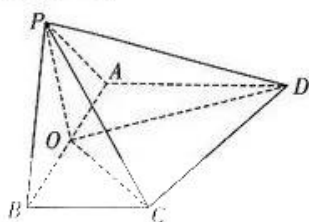
数学试题(长郡版) 第 3 页(共 5 页)

四、解答题(共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $c=2, C=\frac{\pi}{3}$.

- (1)当 $2\sin 2A + \sin(2B+C) = \sin C$ 时,求 $\triangle ABC$ 的面积;
(2)求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

18. (12 分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 为 AB 的中点,平面 $POC \perp$ 平面 $ABCD, AD \parallel BC, AB \perp BC, PA=PB=BC=AB=2, AD=3$.



- (1)求证:平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$;
(2)求二面角 $O-PD-C$ 的余弦值.

19. (12 分)市教育局计划举办某知识竞赛,先在 A, B, C, D 四个赛区举办预赛,每位参赛选手先参加“赛区预赛”,预赛得分不低于 100 分就可以成功晋级决赛,每个赛区预赛中,成功晋级并且得分最高的选手获得一次决赛中的“错题重答”特权. 赛区预赛的具体规则如下:每位选手可以在以下两种答题方式中任意选择一种答题.

方式一:每轮必答 2 个问题,共回答 6 轮,每轮答题只要不是 2 题都错,则该轮次中参赛选手得 20 分,否则得 0 分,各轮答题的得分之和即为预赛得分;

方式二:每轮必答 3 个问题,共回答 4 轮,在每一轮答题中,若答对不少于 2 题,则该轮次中参赛选手得 30 分,如果仅答对 1 题,则得 20 分,否则得 0 分. 各轮答题的得分之和即为预赛得分. 记某选手每个问题答对的概率均为 $p(0 < p < 1)$.

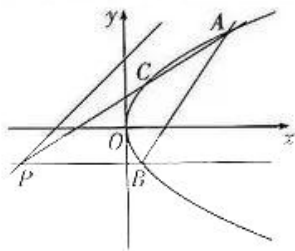
- (1)若 $p=\frac{1}{2}$,该选手选择方式二答题,求他晋级的概率;
(2)证明:该选手选择两种方式答题的得分期望相等.

20. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n - 4a_{n-1} = -\frac{4^n}{n(n-1)}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知数列 $b_n = na_n - 1$, 证明: $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} < \frac{4}{9}$.

21. (12分) 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 过点 $C(1, 2)$, 在 E 上任取不同于 C 的点 A , 直线 AC 与直线 $y = x + 3$ 交于点 P , 过点 P 作 x 轴的平行线交抛物线于点 B .



(1) 求证: 直线 AB 过定点;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x + ax - \frac{1}{x}$, $g(x) = x \ln x + (a-1)x + \frac{1}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 记 $f(x)$ 的零点为 x_0 , $g(x)$ 的极小值点为 x_1 , 当 $a \in (1, 4)$ 时, 判断 x_0 与 x_1 的大小关系, 并说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

