

辽宁省部分重点中学协作体 2023-2024 学年第一学期高三开学测试卷 C

一、单选题：

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	A	A	D	D	C	C

二、多选题：

9	10	11	12
AD	AD	BC	ABC

三、填空题：

13	14	15	16
$4x+y=0$	$(3, +\infty)$	$\sqrt{6}-\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$	$\frac{\sqrt{8091}}{2}\pi$

四、解答题：

17. 解：(1) 由图像可得 $A=2$, $\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4} \times \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega=2$, 2 分

$$2 \times \frac{13\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ 解得 } \varphi = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \because 0 \leq \varphi < \pi, \therefore \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}); \quad 4 \text{ 分}$$

(2) 由题意可知 $g(x) = 2\sin[4(x - \frac{\pi}{8}) + \frac{\pi}{3}] + 1 = 2\sin(4x - \frac{\pi}{6}) + 1$, 6 分

$$\text{令 } 4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ 解得 } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 的图像的对称轴方程为 } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } 4x - \frac{\pi}{6} = k\pi, \text{ 解得 } x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 的图像的对称中心坐标为 } (\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, 1), k \in \mathbb{Z}. \quad 10 \text{ 分}$$

18. 解：(1) $\because \alpha \in \mathbb{R}, \therefore -1 \leq \sin \alpha \leq 1$, 又 $f(\sin \alpha) \geq 0$ 恒成立, $\therefore f(1) \geq 0$, 2 分

$$\because \beta \in \mathbb{R}, \therefore 1 \leq 2 + \cos \alpha \leq 3, \text{ 又 } f(2 + \cos \beta) \leq 0 \text{ 恒成立}, \therefore f(1) \leq 0, \quad 4 \text{ 分}$$

$$\therefore f(1) = 0, \therefore 1 + b + c = 0, \therefore b + c = -1; \quad 5 \text{ 分}$$

(2) $\because \beta \in \mathbb{R}, \therefore 1 \leq 2 + \cos \alpha \leq 3$, 又 $f(2 + \cos \beta) \leq 0$ 恒成立, $\therefore f(3) \leq 0$, 7 分

$$\text{即 } 9 + 3b + c \leq 0, \text{ 又由 (1) 可知 } b + c = -1, \therefore 9 + 3 \times (-1 - c) + c \leq 0, \text{ 解得 } c \geq 3; \quad 8 \text{ 分}$$

(3) $f(\sin \alpha) = \sin^2 \alpha + b \cdot \sin \alpha + c = \sin^2 \alpha - (c+1) \cdot \sin \alpha + c, \because c \geq 3, \therefore \frac{c+1}{2} \geq 2$, 10 分

$$\therefore \text{当 } \sin \alpha = -1 \text{ 时}, f(x) \text{ 取得最大值为 } 8, \therefore f(-1) = 1 - b + c = 8, \quad 11 \text{ 分}$$

$$\therefore b = -4, c = 3, \therefore f(x) = x^2 - 4x + 3. \quad 12 \text{ 分}$$

19. 解：(1) $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}, \therefore f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上是增函数, 2 分

$$\therefore f(-\frac{1}{2}) \leq f(x) \leq f(\frac{1}{2}), \text{ 即 } -1 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}, \therefore |f(x)| \leq 1, \quad 4 \text{ 分}$$

$\therefore f(x)$ 为有界函数, 所有上界的集合为 $[1, +\infty)$; 5 分

(2) $g(x) = 1 + a \cdot (\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{4})^x$, 在 $[0, +\infty)$ 上是以 3 为上界的有界函数,

$$\therefore -3 \leq 1 + a \cdot (\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{4})^x \leq 3 \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上恒成立}, \quad 7 \text{ 分}$$

$$\therefore -(4 \cdot 2^x + 2^{-x}) \leq a \leq 2 \cdot 2^x - 2^{-x} \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上恒成立}, \quad 9 \text{ 分}$$

而 $-(4 \cdot 2^x + 2^{-x})$ 的在定义域上的最大值为 -5 , $2 \cdot 2^x - 2^{-x}$ 在定义域上的最小值为 1 ,

$$\therefore -5 \leq a \leq 1, \text{ 则实数 } a \text{ 的取值范围为 } [-5, 1]. \quad 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2ax \cdot \ln x + ax + b$, 1 分

$$\therefore f'(1) = a + b = 0, \quad f(e) = ae^2 + b(e-1) = a \cdot (e^2 - e + 1) = e^2 - e + 1, \therefore a = 1, \quad b = -1; \quad 3 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 可知, $f(x) = x^2 \cdot \ln x - x + 1$,

$$\text{设 } g(x) = x^2 \cdot \ln x + x - x^2 \quad (x \geq 1), \quad g'(x) = 2x \cdot \ln x - x + 1, \quad 4 \text{ 分}$$

$$g''(x) = 2 \ln x, \text{ 当 } x \geq 1 \text{ 时}, \quad g''(x) > 0, \therefore g'(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增}, \therefore g'(x) \geq g'(1) = 0,$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调递增}, \therefore g(x) \geq g(1) = 0, \therefore f(x) \geq (x-1)^2; \quad 6 \text{ 分}$$

(3) 设 $h(x) = x^2 \cdot \ln x - x - m(x-1)^2 + 1$, 定义域为 $[1, +\infty)$, $h'(x) = 2x \cdot \ln x + x - 2m(x-1) - 1$,

$$\text{从 (2) 可知 } x^2 \cdot \ln x \geq (x-1)^2 + x - 1 = x(x-1), \therefore x \cdot \ln x \geq x - 1, \therefore h'(x) \geq (3-2m)(x-1), \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{① 当 } 3-2m \geq 0 \text{ 即 } m \leq \frac{3}{2} \text{ 时}, \quad h'(x) \geq 0, \therefore h(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 单调递增}, \therefore h(x) \geq h(1) = 0, \text{ 成立}, \quad 9 \text{ 分}$$

$$\text{② 当 } 3-m < 0 \text{ 即 } m > \frac{3}{2} \text{ 时}, \quad h'(x) = 2x \cdot \ln x - (1-2m)(x-1), \quad h''(x) = 2 \ln x + 3 - 2m,$$

$$\text{令 } h''(x) = 0, \text{ 得 } x_0 = e^{\frac{2m-3}{2}} - 2 > 1, \text{ 当 } x \in [1, x_0) \text{ 时}, \quad h'(x) < h'(1) = 0,$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } [1, x_0) \text{ 上单调递减}, \therefore h(x) < h(1) = 0, \text{ 不成立}, \quad 11 \text{ 分}$$

$$\text{综上所述, 实数 } m \text{ 的取值范围为 } (-\infty, \frac{3}{2}]. \quad 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 + \ln x$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$, 2 分

$$\text{当 } x \in (0, \frac{1}{e}) \text{ 时}, \quad f'(x) < 0, \therefore f(x) \text{ 在 } (0, \frac{1}{e}) \text{ 上单调递减}, \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in (\frac{1}{e}, +\infty) \text{ 时}, \quad f'(x) > 0, \therefore f(x) \text{ 在 } (\frac{1}{e}, +\infty) \text{ 上单调递增}; \quad 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 存在, 理由如下: } f(a+x) < f(a) \cdot e^x \Leftrightarrow (a+x) \ln(a+x) < a \ln a \cdot e^x \Leftrightarrow \frac{(a+x) \ln(a+x)}{e^{a+x}} < \frac{a \ln a}{e^a}, \quad 5 \text{ 分}$$

$$\text{构造函数 } g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{e^x}, \text{ 定义域为 } (0, +\infty), \text{ 则 } g'(x) = \frac{\ln x + 1 - x \cdot \ln x}{e^x}, \quad 6 \text{ 分}$$

令 $h(x) = \ln x + 1 - x \cdot \ln x$ ，定义域为 $(0, +\infty)$ ， $h'(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$ ，显然 $h'(x)$ 是减函数，且 $h'(1) = 0$ ，

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，而 $h(1) = \ln 1 + 1 - \ln 1 = 1 > 0$ ， 8 分

$$h\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln \frac{1}{e^2} + 1 - \frac{1}{e^2} \cdot \ln \frac{1}{e^2} = -2 + 1 + \frac{2}{e^2} = \frac{2 - e^2}{e^2} < 0, \quad h(e) = \ln e + 1 - e \cdot \ln e = 2 - e < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上各有一个零点，分别为 x_1 和 x_2 ，

并且在区间 $(0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上， $h(x) < 0$ 即 $g'(x) < 0$ ，在区间 (x_1, x_2) 上， $h(x) > 0$ 即 $g'(x) > 0$ ，

从而可知 $g(x)$ 在区间 $(0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减，在区间 (x_1, x_2) 上单调递增， $g(1) = 0$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $g(x) < 0$ ， $x \in (1, +\infty)$ 时， $g(x) > 0$ ，

而 $g(x_2)$ 是函数的极大值，则题目要求的 $m = x_2$ ，理由如下：

当 $a > x_2$ 时，对于任意非零整数 x ， $a + x > a + x_2$ ，而 $g(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(a+x) < g(a)$ 恒成立，说明 $m \leq x_2$ ，

当 $a \in (0, x_2)$ 时，取 $x = x_2 - a$ ，则 $x > 0$ 且 $g(a+x) = g(x_2) > g(a)$ ，题目中的不等式不能恒成立，

$\therefore$ 说明 m 不能比 x_2 小， 11 分

综合可知，题目要求的最小正常数为 x_2 ，

即存在 $m = x_2$ ，当 $a > m$ 时，对于任意正实数 x ，不等式 $f(a+x) < f(a) \cdot e^x$ 恒成立。 12 分

22. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = 4x - x - \frac{a}{x} = \frac{-x^2 + 4x - a}{x} = -\frac{x^2 - 4x + a}{x}$ ， 1 分

$$\text{设 } g(x) = x^2 - 4x + a, \text{ 令 } g(x) = 0, \Delta = 16 - 4a,$$

①当 $a \geq 4$ 时， $\Delta \leq 0$ ， $f'(x) \leq 0$ 恒成立， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

②当 $0 < a < 4$ 时， $\Delta > 0$ ， $g(x) = 0$ 的 2 个根为 $x_1 = 2 - \sqrt{4-a}$ 、 $x_2 = 2 + \sqrt{4-a}$ ， $0 < x_1 < x_2$ ，

当 $0 < x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, 2 - \sqrt{4-a})$ 和 $(2 + \sqrt{4-a}, +\infty)$ 上单调递减，

当 $x_1 < x < x_2$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(2 - \sqrt{4-a}, 2 + \sqrt{4-a})$ 上单调递增，

③当 $a \leq 0$ 时， $\Delta > 0$ ， $g(x) = 0$ 的 2 个根为 $x_1 = 2 - \sqrt{4-a}$ 、 $x_2 = 2 + \sqrt{4-a}$ ， $x_1 \leq 0 < x_2$ ，

当 $0 < x < x_2$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, 2 + \sqrt{4-a})$ 上单调递增，

当 $x > x_2$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 在 $(2 + \sqrt{4-a}, +\infty)$ 上单调递减； 4 分

(2) $\because f(x)$ 有两个极值点 x_1 、 x_2 ， $\therefore$ 由 (1) 可知 $0 < a < 4$ ，且 $x_1 + x_2 = 4$ 、 $x_1 \cdot x_2 = a$ ，

$$\therefore f(x_1) + f(x_2) = (4x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - a \cdot \ln x_1) + (4x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - a \cdot \ln x_2)$$

$$= 4(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - a \cdot (\ln x_1 + \ln x_2) = a - a \cdot \ln a + 8,$$

要证 $f(x_1) + f(x_2) < 7 + e - \ln x_1 - \ln x_2$ ，即证 $a - a \cdot \ln a + 8 < 7 + e - \ln a$ ，

只需证 $1 - a \cdot \ln a + a + \ln a - e < 0$ ， $a \in (0, 4)$ ， 7 分

令 $m(a) = 1 - a \cdot \ln a + a + \ln a - e$ ，定义域为 $(0, 4)$ ，则 $m'(a) = -\ln a + \frac{1-a}{a} + 1 = \frac{1}{a} - \ln a$ ，

令 $n(a) = m'(a)$ ，则 $n'(a) = -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} < 0$ 恒成立， $\therefore m'(a)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递减，

又 $m'(1) = 1 > 0$ 、 $m'(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 = \ln \sqrt{e} - \ln 2 = \ln \frac{\sqrt{e}}{2} = \ln \sqrt{\frac{e}{4}} < 0$ ，

由零点存在性定理得， $\exists a_0 \in (1, 2)$ 使得 $m'(a_0) = 0$ ，即 $\ln a_0 = \frac{1}{a_0}$ ，

$\therefore$ 当 $0 < a < a_0$ 时， $m'(a) > 0$ ， $m(a)$ 单调递增，当 $a_0 < a < 4$ 时， $m'(a) < 0$ ， $m(a)$ 单调递减，

则 $m(a)$ 在 $x = a_0$ 处取得极大值也是最大值为：

$$m(a)_{\max} = m(a_0) = 1 - a_0 \cdot \ln a_0 + a_0 + \ln a_0 - e = (1 - a_0) \cdot \frac{1}{a_0} + a_0 + 1 - e = a_0 + \frac{1}{a_0} - e, \quad 10 \text{ 分}$$

令 $h(t) = t + \frac{1}{t} - e$ ， $t \in (1, 2)$ ，则当 $t \in (1, 2)$ 时， $h'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0$ ， $\therefore h(t)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增，

$\therefore a_0 + \frac{1}{a_0} - e < 2 + \frac{1}{2} - e < 0$ ， $\therefore m(a) < 0$ ，即 $f(x_1) + f(x_2) < 7 + e - \ln x_1 - \ln x_2$ 。12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线