高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|3^x>9\}$，$B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A. $[-1,0)$　　B. $(0,5)$

C. $[0,5]$　　D. $[-2,2]$

2. 在复平面内，$\frac{-3i}{1+i}$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 新能源汽车是指采用非常规的车用燃料作为动力来源（或使用常规的车用燃料、采用新型车载动力装置），综合车辆的动力控制和驱动方面的先进技术，形成的技术原理先进、具有新技术、新结构的汽车. 新能源汽车包括混合动力电动汽车(HEV)、纯电动汽车(BEV，包括太阳能汽车)、燃料电池电动汽车(FCEV)、其他新能源(如超级电容器、飞轮等高效储能器)汽车等. 非常规的车用燃料指除汽油、柴油之外的燃料. 下表是2022年我国某地区新能源汽车的前5个月销售量与月份的统计表：

月份代码 x	1	2	3	4	5
销售量 y(万辆)	0.5	0.6	1	1.4	1.5

由上表可知其线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+0.16$，则 $\hat{b}$ 的值是

A. 0.28　　B. 0.32　　C. 0.56　　D. 0.64

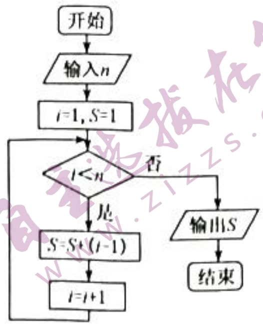
4. 已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，则 $\frac{\sin\alpha}{1-\tan\alpha}$ 的值为

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|=3$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 执行如图所示的程序框图，若输出的 S 是 56，则输入的 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 是



A. 10　　B. 11

C. 12　　D. 13

7. $\left(2x-\frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中，x^3y^3 的系数是

A. 5　　B. 15

C. 20　　D. 25

8. 已知函数 $f(x)=2\cos^2\frac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-1(\omega>0,x\in\mathbf{R})$，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的最大值是

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{11}{12}$　　D. $\frac{5}{3}$

9. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=3AB$，则直线 PB 与直线 AC 所成角的余弦值是

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

10. 已知 O 为坐标原点，抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 与曲线 $E:y=\sqrt{x}$ 交于点 A，其横坐标为 4，记 C 的平行于 OA 的切线为 l_1，E 的平行于 OA 的切线为 l_2，则下列判断错误的是

A. $p=4$　　B. OA 的方程为 $x-2y=0$

C. l_1 的方程为 $x-2y-1=0$　　D. l_2 的方程为 $x-2y-1=0$

11. 已知点 $P(m,n)$ 是函数 $y=2-\sqrt{-x^2-2x}$ 图象上的动点，则 $|3m+5n+15|$ 的最小值是

A. $22-\sqrt{34}$　　B. $22+\sqrt{34}$

C. $\frac{\sqrt{34}}{2}-1$　　D. $\frac{\sqrt{34}}{2}+1$

12. 若 $a\sin a-4b\sin b\cos b=4b^2-a^2+1$，则

A. $|a|<|2b|$　　B. $|a|>|2b|$　　C. $a<2b$　　D. $a>2b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=ae^x+x^2-8x$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 -5，则 $a=$________.

14. 在锐角三角形 ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $2(a\cos C+c\cos A)\sin B=\sqrt{3}b$，则 $\cos B=$________.

15. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=BC=2\sqrt{5}$，$PB=AC=\sqrt{13}$，$AB=PC=5$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积是________.

16. 已知椭圆和双曲线有相同的焦点 F_1,F_2，它们的离心率分别为 e_1,e_2，点 P 为它们的一个交点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，则 $e_1^2+e_2^2$ 的取值范围是________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17.（本小题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=3$，$a_{n+1}=2S_n+3(n\in N^*)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{\log_3 a_n}{a_n}$，记数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n<\frac{3}{4}$.

18.（本小题满分12分）

某大型工厂有6台大型机器，在1个月中，1台机器至多出现1次故障，且每台机器是否出现故障是相互独立的，出现故障时需1名工人进行维修. 每台机器出现故障的概率为$\frac{1}{2}$. 已知1名工人每月只有维修2台机器的能力(若有2台机器同时出现故障，工厂只有1名维修工人，则该工人只能逐台维修，对工厂的正常运行没有任何影响)，每台机器不出现故障或出现故障时能及时得到维修，就能使该厂每月获得10万元的利润，否则将亏损2万元. 该工厂每月需支付给每名维修工人1万元的工资.

(1)若每台机器在当月不出现故障或出现故障时有工人进行维修(例如：3台大型机器出现故障，则至少需要2名维修工人)，则称工厂能正常运行. 若该厂只有1名维修工人，求工厂每月能正常运行的概率；

(2)已知该厂现有2名维修工人.

(ⅰ)记该厂每月获利为X万元，求X的分布列与数学期望；

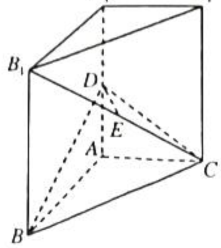
(ⅱ)以工厂每月获利的数学期望为决策依据，试问该厂是否应再招聘1名维修工人？

19.（本小题满分12分）

如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，D，E分别为AA_1，B_1C的中点.

(1)求证：DE//平面ABC；

(2)若$DE\perp BC$，二面角$A-BD-C$的大小为$\frac{\pi}{3}$，求直线B_1C与平面BCD所成角的大小.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为 A_1、A_2,$|A_1A_2|=4$,且过点$\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

(1)求 C 的方程;

(2)若直线 $l:y=k(x-4)(k\neq 0)$与 C 交于 M、N 两点,直线 A_1M 与 A_2N 相交于点 G,证明:点 G 在定直线上,并求出此定直线的方程.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$的最小值为 a^2,求 a 的值;

(2)若存在 $0<x_1<x_2$,且 $x_1+x_2=2$,使得 $f(x_1)=f(x_2)$,求 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+2\cos\alpha,\\ y=4+2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(1)把 C_1 的参数方程化为极坐标方程;

(2)求 C_1 与 C_2 交点的极坐标($\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta<2\pi$).

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知 $f(x)=|x+a|(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)\geqslant|2x-1|$的解集为$[0,2]$,求 a 的值;

(2)若对任意 $x\in\mathbf{R}$,不等式 $f(x)+|x-a|\geqslant 3a-2$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　$A=\{x|3^x>9\}=\{x|x>2\}$，故$\complement_U A=\{x|x\leqslant 2\}$，所以$(\complement_U A)\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}=[-2,2]$. 故选 D.

2. C　$\frac{-3i}{1+i}=\frac{-3i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-3i+3i^2}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$，故$\frac{-3i}{1+i}$对应的点为$\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$，位于第三象限. 故选 C.

3. A　由表中数据可得$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{0.5+0.6+1+1.4+1.5}{5}=1$，将$(3,1)$代入$\hat{y}=\hat{b}x+0.16$，即$1=\hat{b}\times 3+0.16$，解得$\hat{b}=0.28$. 故选 A.

4. A　由$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，得$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$，所以$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$，所以$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$，所以$\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{\tan\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{3}{8}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{4}$. 故选 A.

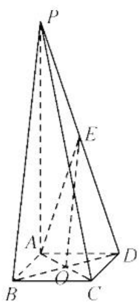
5. D　因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$，即$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}|^2$，则$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3\times 1}=\frac{1}{3}$，所以$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 故选 D.

6. C　由框图可知，$S=1+0+1+2+3+\cdots+(i-1)=56$，即$1+2+3+\cdots+(i-1)=55$，所以$\frac{(i-1)i}{2}=55$，解得$i=11$，故最后一次对条件进行判断时$i=11+1=12$，所以$n=12$. 故选 C.

7. B　因为$\left(2x-\frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5=2x(x+y)^5-\frac{y^2}{x}(x+y)^5$，$2x(x+y)^5$的展开式通项为$T_{k+1}=2xC_5^k\cdot x^{5-k}\cdot y^k=2C_5^k\cdot x^{6-k}\cdot y^k$，$\frac{y^2}{x}(x+y)^5$的展开式通项为$S_{r+1}=\frac{y^2}{x}C_5^r\cdot x^{5-r}\cdot y^r=C_5^r\cdot x^{4-r}\cdot y^{r+2}$，由$\begin{cases}6-k=3,\\4-r=3,\end{cases}$可得$\begin{cases}k=3,\\r=1,\end{cases}$因此$\left(2x-\frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$的展开式中，$x^3y^3$的系数为$2C_5^3-C_5^1=15$. 故选 B.

8. C　$f(x)=2\cos^2\frac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-1=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，令$f(x)=0$，$\omega x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$x=\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6\omega}(k\in\mathbf{Z})$. 又函数$f(x)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有零点，所以$\begin{cases}\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6\omega}\leqslant\pi,\\\frac{(k+1)\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6\omega}\geqslant 2\pi,\end{cases}$解得$k-\frac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{k+1}{2}-\frac{1}{12}(k\in\mathbf{Z})$，$\omega>0$，所以$k=0$，$0<\omega\leqslant\frac{5}{12}$，$k=1$，$\frac{5}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{11}{12}$，所以$\omega$的最大值是$\frac{11}{12}$. 故选 C.

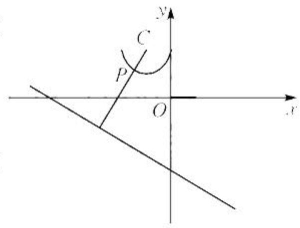
9. B　连接BD交AC于点O，取PD的中点E，连接EO，EA. 不妨设$AB=1$. 因为四边形$ABCD$是正方形，所以O是BD的中点，又E是PD的中点，所以$OE\parallel PB$，所以直线PB与直线AC所成角即为$\angle EOA$（或其补角）. 因为$PA\perp$平面$ABCD$，又AB，$AD\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp AB$，$PA\perp AD$. 在$\triangle PAD$中，$PA\perp AD$，$PA=3$，$AD=1$，所以$AE=\frac{\sqrt{10}}{2}$；在$\triangle PAB$中，$PA\perp AB$，$PA=3$，$AB=1$，所以$PB=\sqrt{10}$，所以$EO=\frac{\sqrt{10}}{2}$；在$\triangle AOE$中，$AE=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$EO=\frac{\sqrt{10}}{2}$，所以$\cos\angle AOE=\frac{AO^2+OE^2-AE^2}{2\cdot AO\cdot OE}=\frac{\sqrt{5}}{10}$，即直线$PB$与直线$AC$所成角的余弦值是$\frac{\sqrt{5}}{10}$. 故选 B.



10. D　对于 A，因为点A的横坐标为 4，点A在曲线E上，所以$A(4,2)$，又因为点A在抛物线C上，所以$4^2=2p\times 2$，解得$p=4$，故 A 正确；对于 B，因为$A(4,2)$，$O(0,0)$，所以得OA的方程为$x-2y=0$，故 B 正确；对于 C，由选项 A 可知

C的方程为$x^2=8y$.设$l_1:y=\frac{1}{2}x+m$.联立$\begin{cases}x^2=8y,\\ y=\frac{1}{2}x+m,\end{cases}$得$x^2-4x-8m=0$.因为$l_1$与$C$相切,所以$\Delta=(-4)^2-4\times(-8m)=0$.解得$m=-\frac{1}{2}$.所以$l_1:y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.即$l_1$的方程为$x-2y-1=0$.故C正确;对于D.设$l_2:y=\frac{1}{2}x+n$.联立$\begin{cases}y=\sqrt{x},\\ y=\frac{1}{2}x+n,\end{cases}$得$x^2+4(n-1)x+4n^2=0$.因为$l_2$与$E$相切,所以$\Delta=16(n-1)^2-4\times(4n^2)=0$.解得$n=\frac{1}{2}$.所以$l_2:y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.即$l_2$的方程为$x-2y+1=0$.故D错误. 故选D.

11. A　函数$y=2-\sqrt{-x^2-2x}$的图象是半圆,圆心为$C(-1,2)$,半径为$r=1$.如图,作直线$3x+5y+15=0$.C到直线$3x+5y+15=0$的距离为$d=\frac{|-3+10+15|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{11\sqrt{34}}{17}$.



$\therefore P(m,n)$到直线$3x+5y+15=0$的距离为$d'=\frac{|3m+5n+15|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{|3m+5n+15|}{\sqrt{34}}$.其最小值为$\frac{11\sqrt{34}}{17}-1$.$\therefore|3m+5n+15|$的最小值为$\sqrt{34}\times\left(\frac{11\sqrt{34}}{17}-1\right)=22-\sqrt{34}$.

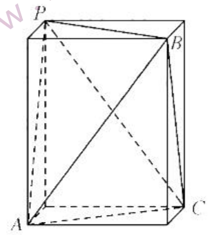
故选A.

12. B　令$f(x)=x\sin x+x^2$.$\because f(-x)=-x\sin(-x)+(-x)^2=x\sin x+x^2=f(x)$.$\therefore f(x)$是偶函数.$\because f'(x)=\sin x+x\cos x+2x=x(\cos x+1)+(\sin x+x)$.令$g(x)=\sin x+x$.则$g'(x)=\cos x+1\geq0$.$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,当$x\geq0$时,$g(x)\geq g(0)=0$.此时$f'(x)\geq0$.$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.$\because f(x)$是偶函数.由$a\sin a-4b\sin b\cos b=4b^2-a^2+1$可得$a\sin a+a^2=2b\sin 2b+(2b)^2+1$.即$f(a)=f(2b)+1$.$\therefore f(a)>f(2b)$.$\because f(x)$是偶函数.则$f(|a|)>f(|2b|)$.$\therefore|a|>|2b|$.故选B.

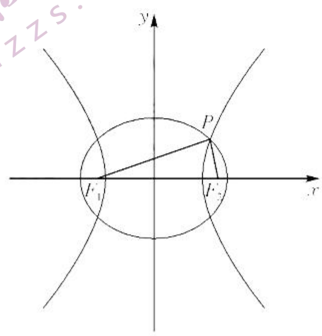
13. 3　由已知得$f'(x)=ae^x+2x-8$.因为$f'(0)=a-8=-5$.所以$a=3$.

14. $\frac{1}{2}$　$\because 2(a\cos C+c\cos A)\sin B=\sqrt{3}b$,由正弦定理可得$2(\sin A\cos C+\sin C\cos A)\sin B=\sqrt{3}\sin B$.$\therefore 2\sin(A+C)\sin B=\sqrt{3}\sin B$,$2\sin^2B=\sqrt{3}\sin B$.又$\sin B\neq0$.$\therefore\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又$0<B<\frac{\pi}{2}$.$\therefore\cos B=\frac{1}{2}$.

15. 29π　如图,将三棱锥$P-ABC$放入长方体中,设该长方体的长、宽、高分别为a,b,c,则$\begin{cases}b^2+c^2=(2\sqrt{5})^2,\\ a^2+b^2=(\sqrt{13})^2,\\ a^2+c^2=5^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\ b=2,\\ c=4.\end{cases}$设三棱锥$P-ABC$的外接球的半径为$R$,则$2R=\sqrt{3^2+2^2+4^2}=\sqrt{29}$,所以$R=\frac{\sqrt{29}}{2}$.所以三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积$S=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2=29\pi$.



16. $(2,+\infty)$　设椭圆的长半轴长为a_1,双曲线的实半轴长为a_2,焦距为$2c$,点P为椭圆与双曲线在第一象限的交点,则$|PF_1|+|PF_2|=2a_1$,$|PF_1|-|PF_2|=2a_2$,解得$|PF_1|=a_1+a_2$,$|PF_2|=a_1-a_2$,如图:



在$\triangle F_1PF_2$中，根据余弦定理可得$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，整理得$4c^2=3a_1^2+a_2^2$，即$\frac{3}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=4$，设$t_1=e_1^2$，$t_2=e_2^2$，则有$0<t_1<1<t_2$，$\frac{3}{t_1}+\frac{1}{t_2}=4$，所以$\frac{1}{t_2}=4-\frac{3}{t_1}=\frac{4t_1-3}{t_1}$，即有$t_2=\frac{t_1}{4t_1-3}>1$，所以$\frac{3}{4}<t_1<1$，所以$e_1^2+e_2^2=t_1+t_2=t_1+\frac{t_1}{4t_1-3}=\frac{4t_1^2-2t_1}{4t_1-3}$，设$u=4t_1-3$，则$t_1=\frac{u+3}{4}$，且$0<u<1$，所以$e_1^2+e_2^2=\frac{u^2+4u+3}{4u}=\frac{1}{4}\left(u+\frac{3}{u}\right)+1$，因为$y=x+\frac{3}{x}$在$(0,1)$上单调递减，所以$u+\frac{3}{u}>4$，所以$e_1^2+e_2^2>2$.

17.（1）解：当$n=1$时，$a_2=2S_1+3$，即$a_2=2a_1+3=9$；…………………… 1分

当$n\geq2$时，由$a_{n+1}=2S_n+3(n\in\mathbf{N}^*)$，得$a_n=2S_{n-1}+3$，两式相减得$a_{n+1}=3a_n$. …………………… 3分

又$a_2=3a_1$，所以$a_{n+1}=3a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，所以$\{a_n\}$是以3为首项，3为公比的等比数列. …………………… 5分

所以$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$. …………………… 6分

（2）证明：由（1）知$b_n=\frac{\log_3a_n}{a_n}=\frac{n}{3^n}$，…………………… 8分

所以$T_n=1\times\frac{1}{3}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$\frac{1}{3}T_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$，

两式相减得：$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{2\cdot3^{n+1}}$，

所以$T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}$，…………………… 10分

又$\frac{2n+3}{4\times3^n}>0$，所以$T_n<\frac{3}{4}$. …………………… 12分

18.解：（1）因为该厂只有1名维修工人，

所以要使工厂正常运行，最多只能出现2台大型机器出现故障，…………………… 1分

故该工厂能正常运行的概率为$(1-\frac{1}{2})^6+C_6^1\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})^5+C_6^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{32}$. …………………… 4分

（2）（ⅰ）X的可能取值为34，46，58，…………………… 5分

$P(X=34)=(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$，…………………… 6分

$P(X=46)=C_6^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{32}$，…………………… 7分

$P(X=58)=1-\frac{1}{64}-\frac{3}{32}=\frac{57}{64}$，…………………… 8分

则X的分布列为

X	34	46	58
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{57}{64}$

…………………… 9分

故$E(X)=34\times\frac{1}{64}+46\times\frac{3}{32}+58\times\frac{57}{64}=\frac{113}{2}$. …………………… 10分

（ⅱ）若该厂有3名维修工人，则该厂获利的数学期望为$6\times10-3=57$万元. …………………… 11分

因为$\frac{113}{2}<57$，所以该厂应再招聘1名维修工人. …………………… 12分

19.(1)证明：取BC的中点M，连结AM，EM，

则$DA\parallel BB_1$，且$DA=\frac{1}{2}BB_1$，$EM\parallel BB_1$，且$EM=\frac{1}{2}BB_1$. ………………………… 2分

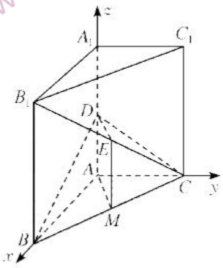
所以$DA\parallel EM$，且$DA=EM$，所以四边形$AMED$为平行四边形，………………………… 3分

所以$DE\parallel AM$.

又$AM\subset$平面ABC，$DE\not\subset$平面ABC，

所以$DE\parallel$平面ABC. ………………………… 5分

(2)解：以A为原点，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，



设$AB=1$，$AC=b(b>0)$，$AA_1=2c(c>0)$，

则$B(1,0,0)$，$C(0,b,0)$，$D(0,0,c)$，$B_1(1,0,2c)$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{b}{2},c\right)$，

所以$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2},\frac{b}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,b,0)$. ………………………… 6分

因为$DE\perp BC$，所以$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以$b=1$. ………………………… 7分

又$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,0,c)$，

设平面BCD的一个法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+cz=0,\end{cases}$

令$x=1$，则$y=1$，$z=\frac{1}{c}$，所以$\boldsymbol{n}=\left(1,1,\frac{1}{c}\right)$；………………………… 8分

又平面ABD的一个法向量$\overrightarrow{AC}=(0,1,0)$，所以$\cos\frac{\pi}{3}=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}\right|$.

所以$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{c^2}}}$，解得$c=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$. ………………………… 10分

又$\overrightarrow{B_1C}=(-1,1,-\sqrt{2})$.

设直线B_1C与平面BCD所成的角为θ，

则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{B_1C}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1+1+2}\cdot\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2}$，………………………… 11分

所以直线B_1C与平面BCD所成角为$\frac{\pi}{6}$. ………………………… 12分

20.(1)解：因为$|A_1A_2|=4$，所以$2a=4$，解得$a=2$. ………………………… 1分

因为C过点$\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，所以$\frac{(\sqrt{2})^2}{4}+\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{b^2}=1$，………………………… 2分

解得$b=\sqrt{3}$. ………………………… 3分

所以C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4分

(2)证明：设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，所以$l_{A_1M}:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$l_{A_2N}:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$. ………………………… 6分

由$\begin{cases}y=k(x-4),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$整理得$(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$.

则 $\Delta=(-32k^2)^2-4(3+4k^2)(64k^2-12)>0$，解得 $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ 且 $k\neq0$，$x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$，

$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$. ………………………………………………………………………… 8 分

由 $\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2), \end{cases}$ 得 $x=\dfrac{\frac{2y_2}{x_2-2}+\frac{2y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}-\frac{y_1}{x_1+2}}=\frac{2k(x_2-4)(x_1+2)+2k(x_1-4)(x_2-2)}{k(x_2-4)(x_1+2)-k(x_1-4)(x_2-2)}=\frac{2x_1x_2-6x_1-2x_2}{3x_2-x_1-8}$

$=\frac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)-4x_1}{3(x_1+x_2)-8-4x_1}=\dfrac{2\times\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-2\times\frac{32k^2}{3+4k^2}-4x_1}{3\times\frac{32k^2}{3+4k^2}-8-4x_1}=1$，………………………………… 10 分

所以点 G 在定直线 $x=1$ 上. ……………………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1) 由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}$. ………………………… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无最小值. ……………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$；令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{a}$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\right)=a\ln\frac{1}{a}+a=a-a\ln a$. ……………………………………………………… 3 分

所以 $a-a\ln a=a^2$，即 $\ln a+a=1$. 设 $g(a)=\ln a+a$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}+1>0$，

所以 $g(a)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，又 $g(1)=1$，所以 $a=1$. ……………………………………………… 4 分

(2) 由 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $a\ln x_1+\frac{1}{x_1}=a\ln x_2+\frac{1}{x_2}$，即 $a\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=0$，

又 $x_1+x_2=2$，所以 $a\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1+x_2}{2x_2}-\frac{x_1+x_2}{2x_1}=0$，得 $a\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{2x_2}-\frac{x_2}{2x_1}=0$.

令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，则 $a\ln t+\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}t=0$，令 $h(t)=a\ln t+\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}$，

故问题可转化为函数 $h(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有零点. ……………………………………………… 5 分

$h'(t)=\frac{a}{t}-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}=\frac{-t^2+2at-1}{2t^2}$，其中 $h'(1)=a-1$.

因为函数 $y=-t^2+2at-1$ 的对称轴的方程为 $t=a$，且当 $t=1$ 时，$y=2(a-1)$，

故当 $a\leqslant1$，则 $y<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h'(t)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，因为 $h(1)=0$，所以 $h(t)<0$，故 $h(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上无零点，不合题意.

……………………………………………………………………………………………… 6 分

当 $a>1$，令 $h'(t)=0$，得 $-t^2+2at-1=0$，$\Delta=4a^2-4>0$，故 $h'(t)=0$ 有两不等实根 t_1 和 t_2，

设 $t_1<t_2$，且 $t_1t_2=1$，$t_1+t_2=2a>0$. 故 $0<t_1<1<t_2$.

易知在 $(1,t_2)$ 上，$h'(t)>0$，在 $(t_2,+\infty)$ 上，$h'(t)<0$.

所以 $h(t)$ 在 $(1,t_2)$ 上单调递增，在 $(t_2,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h(1)=0$，故在 $(1,t_2)$ 上 $h(t)>h(1)=0$，故 $h(t)$ 在 $(1,t_2)$ 上无零点； ………………………… 7 分

下面证明函数 $h(t)$ 在减区间 $(t_2,+\infty)$ 上存在零点.

取 $t=e^{2a}(a>1)$，则 $h(e^{2a})=a\ln e^{2a}+\frac{1}{2e^{2a}}-\frac{e^{2a}}{2}=2a^2+\frac{1}{2e^{2a}}-\frac{e^{2a}}{2}$，

当 $a>1$ 时，$\frac{1}{2e^{2a}}<\frac{1}{2e^2}<\frac{1}{2}$，则 $h(e^{2a})<2a^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2a}}{2}$. ………………………… 8分

令 $m(a)=2a^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2a}}{2}$，则 $m'(a)=4a-e^{2a}$，

令 $\varphi(a)=4a-e^{2a}$，当 $a>1$ 时，$\varphi'(a)=4-2e^{2a}<4-2e^2<0$，

所以，函数 $\varphi(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又 $\varphi(1)=4-e^2<0$，所以 $\varphi(a)<0$，即 $m'(a)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

………………………… 10分

所以 $m(a)=2a^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2a}}{2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(e^{2a})<m(a)<m(1)=\frac{5}{2}-\frac{e^2}{2}<0$，即 $h(e^{2a})<0$，

………………………… 11分

又 $h(t_2)>0$，所以 $h(t_2)h(e^{2a})<0$，所以 $h(t)$ 在减区间 $(t_2,+\infty)$ 上存在零点.

综上，实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$. ………………………… 12分

22. 解：(1)曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha,\\ y=4+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

消去参数 α，得 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$. ………………………… 2分

即曲线 C_1 的普通方程为 $x^2+y^2-4x-8y+16=0$. ………………………… 3分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入上式，

得 $\rho^2-4\rho\cos\theta-8\rho\sin\theta+16=0$，此即 C_1 的极坐标方程. ………………………… 5分

(2)曲线 C_2 的极坐标方程 $\rho=4\sin\theta$ 化为直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y=0$， ………………………… 7分

由 $\begin{cases}x^2+y^2-4x-8y+16=0,\\ x^2+y^2-4y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=4.\end{cases}$ ………………………… 9分

所以 C_1 与 C_2 交点的极坐标分别为 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$. ………………………… 10分

23. 解：(1) $f(x)\geq|2x-1|$，即 $|x+a|\geq|2x-1|$，平方整理得 $3x^2-(2a+4)x+1-a^2\leq0$. ………………………… 2分

所以 0，2 是方程 $3x^2-(2a+4)x+1-a^2=0$ 的两根， ………………………… 3分

即 $\begin{cases}\frac{2a+4}{3}=0+2,\\ \frac{1-a^2}{3}=0\times2,\end{cases}$ 解得 $a=1$. ………………………… 5分

(2)因为 $f(x)+|x-a|=|x+a|+|x-a|\geq|x+a-x+a|=2|a|$， ………………………… 6分

所以要使不等式 $f(x)+|x-a|\geq3a-2$ 恒成立，只需 $2|a|\geq3a-2$. ………………………… 7分

当 $a\geq0$ 时，$2a\geq3a-2$，解得 $0\leq a\leq2$； ………………………… 8分

当 $a<0$ 时，$-2a\geq3a-2$，显然成立. ………………………… 9分

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ………………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。