

## 高三年级 10 月份阶段性测试

### 数学试题

考试时间：120 分钟 试题命制人：许振兴 侯雪阳 2023.10

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 6x + 5 < 0\}$ ，则  $M$  的真子集个数为 ( )  
A. 3                      B. 5                      C. 7                      D. 8
2. 已知向量  $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，则  $\angle ABC =$  ( )  
A.  $30^\circ$                   B.  $150^\circ$                 C.  $60^\circ$                   D.  $120^\circ$
3. 已知  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则  $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$  ( )  
A.  $\frac{4}{5}$                       B.  $-\frac{4}{5}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $-\frac{3}{5}$
4. 如果不等式  $3x - m \leq 0$  的正整数解是 1, 2, 3，那么  $m$  的取值范围是 ( )  
A.  $m < 12$                 B.  $m > 9$                 C.  $9 \leq m < 12$             D.  $9 < m \leq 12$
5. 垃圾分类是指按一定规定或标准将垃圾分类储存、投放和搬运，从而转变成公共资源的一系列活动的总称。垃圾分类的目的是提高垃圾的资源价值和经济价值，减少垃圾处理量和处理设备的使用，降低处理成本，减少土地资源的消耗，具有社会、经济、生态等方面的效益。已知某种垃圾的分解率  $v$  与时间  $t$  (月) 满足函数关系式  $v(t) = a \cdot b^t$  (其中  $a, b$  为非零常数)。若经过 12 个月，这种垃圾的分解率为 20%，经过 24 个月，这种垃圾的分解率为 40%，那么这种垃圾完全分解 (分解率为 100%) 至少需要经过 ( ) (参考数据  $\lg 2 \approx 0.3$ )  
A. 64 个月                B. 40 个月                C. 52 个月                D. 48 个月
6. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》，卷下第二十六题，叫做“物不知数”，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七

数之剩二，问物几何？现有这样一个相关的问题：被 3 除余 2 且被 5 除余 3 的正整数按照从小到大的

的顺序排成一列，构成数列  $\{a_n\}$ ，记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，则  $\frac{S_n+30}{n}$  的最小值为 ( )

- A. 30                      B.  $\frac{61}{2}$                       C.  $\frac{65}{3}$                       D. 41

7. 方程  $\frac{x^y}{y^x} = \frac{2^x}{x^y}$  ( $x, y \in \mathbb{N}_+, x \neq 2y$ ) 解的组数为 ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 无数组

8. 已知圆  $O$  的半径为 2,  $P, Q$  是圆  $O$  上任意两点, 且  $\angle POQ = 60^\circ$ ,  $AB$  是圆  $O$  的一条直径, 若

动点  $C$  满足  $\overrightarrow{OC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{OQ}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), 则  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  的最小值为 ( )

- A. -1                      B. -2                      C. -3                      D. -4

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 下列结论正确的是 ( )

- A. “ $x > 1$ ”是“ $|x| > 1$ ”的充分不必要条件  
 B. “ $a \in P$ ”是“ $a \in P \cap Q$ ”的必要不充分条件  
 C. “ $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbb{R}$ , 使  $x^2 + x + 1 < 0$ ”  
 D. “ $x = 1$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的实数根”的充要条件是“ $a + b + c = 0$ ”

10. 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且  $f(x+2) = -f(x)$ , 当  $0 < x \leq 1$  时,  $f(x) = \lg x + 1$ , 则 ( )

- A.  $f(3) = 1$                       B.  $f(x)$  的图像关于点  $(-2, 0)$  对称  
 C.  $f(x)$  的周期为 4                      D.  $f(x)$  在  $[-1, 4]$  上有 7 个零点

11. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图像过点  $M(0, \frac{A}{2})$  和  $N(\pi, 0)$ ,

$f(x)$  的最小正周期为  $T$ , 则 ( )



(II)若向量  $c = (-1, \sqrt{3})$ , 求向量  $c$  在向量  $a - b$  上的投影向量 (用坐标表示).

18. (本小题 12 分) 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < ax + 1 \leq 5\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{4} < x \leq 1\}$ .

(I) 是否存在正实数  $a$  使集合  $A, B$  相等? 若能, 求出  $a$  的值, 若不能, 试说明理由;

(II) 若命题  $p: x \in A$ , 命题  $q: x \in B$  且  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 求实数  $a$  的取值范围.

19. (本小题 12 分) 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n a_{n+1} = 16^n$ ,  $a_1 = 2$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式; (II) 设  $b_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数,} \\ b_{n-1} + n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$  求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n}$ .

20. (本小题 12 分) 已知函数  $f(x) = 1 + a \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ,  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{ax-1}{x+1}$ .

(I) 若  $g(x)$  为奇函数, 求实数  $a$  的值;

(II) 在 (I) 的条件下, 当  $x \in [-3, 2]$  时, 函数  $y = f(x) + m$  存在零点, 求实数  $m$  的取值范围;

(III) 定义在  $D$  上的函数  $f(x)$ , 如果满足: 对任意  $x \in D$ , 存在常数  $M \geq 0$ , 都有  $|f(x)| \leq M$  成立, 则

称  $f(x)$  是  $D$  上的有界函数, 其中  $M$  称为函数  $f(x)$  的一个上界. 若函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是以  $\frac{5}{4}$  为上界

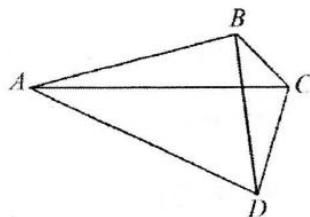
的有界函数, 求实数  $a$  的取值范围.

21. (本小题 12 分) 如图, 四边形  $ABCD$  中, 已知  $BC = 1$ ,

$$AC^2 = AB^2 + AB + 1.$$

(I) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长;

(II) 若  $AB = 3$ ,  $\angle ADB = 60^\circ$ ,  $\angle BCD = 120^\circ$ , 求  $\angle BDC$  的值.



22. (本小题 12 分) 已知函数  $f(x) = x \ln x - x + a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), 且  $f(x) \geq 0$ .

(I) 求实数  $a$  的取值范围;

(II) 已知  $n \in \mathbb{N}^*$ , 证明:  $\sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \dots + \sin \frac{1}{2n} < \ln 2$ .



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

