

准考证号

性别

姓名

学校

市(区、县)

(密封装订线内不要答题)

2021 年全国高中数学联赛（吉林赛区）预赛试题

（考试时间 2021 年 5 月 23 日上午 9:00—11:00）

题号	一	二	三 (13)	三 (14)	三 (15)	三 (16)	总分
得分							
评卷人							
复核人							

考生注意：本试卷共计 4 页，16 道题，满分 120 分

一、选择题（本题共 6 个小题，每小题 5 分，满分 30 分）

本题共有 6 个小题，每小题均给出 (A)、(B)、(C)、(D) 四个结论，其中有且仅有一个是正确的，请将正确答案的代表字母填在题后的括号内。每小题选对得 5 分；不选、选错或多选一律得 0 分。

- 在 $\triangle ABC$ 中， $|\overline{AB}|=2$ ， $|\overline{AC}|=3$ ， $\overline{AB} \cdot \overline{CA} > 0$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ ，则 $\angle BAC$ 等于 ()
(A) 150° (B) 30° (C) 120° (D) 60°
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{2n-17}{2n-19}$ ($n=1, 2, \dots$)，则 $\{a_n\}$ 中最大的项是 ()
(A) a_1 (B) a_9 (C) a_{10} (D) a_{12}
- 关于 x 的方程 $2^{2x-2} - a \cos(1-x) = 0$ 只有一个实数解，则 ()
(A) $a = -1$ (B) $a = 1$ (C) $a = 2$ (D) a 的值不唯一
- 设实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ 4x-y \geq 0 \\ x+y \leq 3 \end{cases}$ ，则 $z = x + 2y - \frac{1}{x}$ 的最大值为 ()
(A) $\frac{77}{6}$ (B) $\frac{56}{15}$ (C) $\frac{23}{6}$ (D) 4

2021 年全国高中数学联赛（吉林赛区）预赛试题第 1 页（共 4 页）

5. 方程组 $\begin{cases} (x+y-1)\sqrt{x-1}=0 \\ x^2+y^2+2x-4=0 \end{cases}$ 的解的个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$ 若对 $\forall x \in (t^2-4, t^2)$, 不等式 $f(x+t) < 4f(x)$ 恒成立,

则实数 t 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2})$ (B) $(0, 1)$ (C) $[\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}]$ (D) $[0, 1]$

得分

二、填空题 (本题共 6 个小题, 每小题 5 分, 满分 30 分)

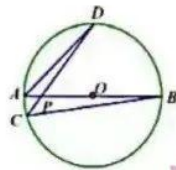
请将答案写在题中横线上, 各小题只要求直接写出结果.

7. 已知 $\alpha, \beta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{3}{5}$, $\sin(\beta-\frac{\pi}{4}) = \frac{12}{13}$.

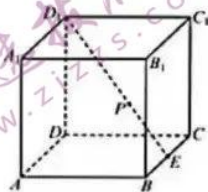
则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值为_____.

8. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 与弦 CD 交于点 P , $CP = \frac{7}{5}$, $PD = 5$, $AP = 1$,

则 $\angle DCB =$ _____.



9. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BC 的中点, 点 P 在线段 D_1E 上运动. 则点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值为_____.



10. 已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2)x + 1$. 若存在 $m > 0$, 使得 $f(m) \leq 0$,

则实数 a 的最大值为_____.

11. 某食品厂制作了 4 种不同的精美卡片, 在该厂生产的每袋食品中都随机装入一张卡片, 规定: 如果收集齐了 4 种不同的卡片, 便可获得奖品. 小明一次性购买该种食品 6 袋, 那么小明获奖的概率是_____.

12. 已知四个整数 a, b, c, d 都是偶数, 且 $0 < a < b < c < d$, $d - a = 90$, 若 a, b, c 成等差数列, b, c, d 成等比数列, 则 $a + b + c + d =$ _____.

得分

三、解答题

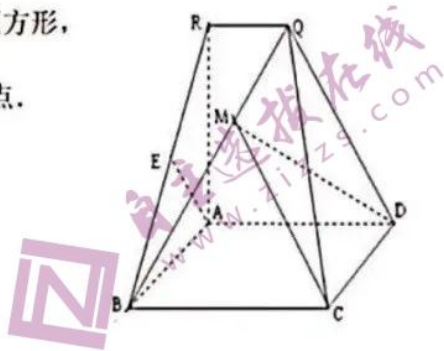
(本题共4道大题, 每题15分, 满分60分)

13. 如图, $RA \perp$ 平面 $ABCD$, $RQ \parallel AD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$AD = AR = 2RQ = 2$. E 为 BR 的中点, M 为线段 BQ 上的动点.

(I) 求证: $AE \perp CM$;

(II) 求 MC 与平面 MQD 所成角的正弦值的取值范围.



14. 已知曲线 C 的方程为 $(x^2 + y)(x + y) = 0$, 直线 $l: y = kx + b$ 与曲线 C 交于三个不同的点 A , B , C .

(1) 若 $b = \frac{1}{16}$, 求 k 的取值范围;

(2) 若 $b = 1$, 且 $|AB| = |BC|$, 求 k 的值.

15. 设 $m > 0$. 若对于满足 $abc \leq \frac{1}{4}$ 且 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} < m$ 的任意一组正数 a, b, c , 均存在以 a, b, c 为三边长的三角形, 求实数 m 的最大值, 说明理由.

16. 平面直角坐标系内有 10 个不同点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_{10}(x_{10}, y_{10})$, 若 $x_i = x_j$ 或 $y_i = y_j$, 则称 P_i 与 P_j 为一个“同标点对”(不考虑 P_i 与 P_j 的次序). 若 10 个不同点满足: 与每个点构成“同标点对”的点均不超过 m 个; 无论何种情况, 都可以恰好将它们分成 5 个点对, 每个点对都不是“同标点对”. 求 m 的最大值.

(密封装订线内不要答题)

2021 年全国高中数学联赛（吉林赛区）预赛试题参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 解： $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \angle BAC = \frac{3}{2}$,

所以 $\sin \angle BAC = \frac{1}{2}$ ，又由已知 $\angle BAC$ 为钝角，从而 $\angle BAC = 150^\circ$ 。

选 A.

2. 解：通项公式 $a_n = 1 + \frac{1}{n-9.5}$ ，当 $n \leq 9$ 时，有 $a_n < 1$ ；

当 $n \geq 10$ 时，有 $a_n > 1$ ，且 $\{a_n\}$ 递减，从而 $\{a_n\}$ 中最大的项是 a_{10} 。

选 C.

3. 解：函数 $f(x) = 2^{2x-2} - a \cos(1-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称。

又方程只有一个实数解，所以 $f(1)=0$ ，得 $a=1$ 。

当 $a=1$ 时， $f(x) = 2^{2x-2} - \cos(1-x) \geq 1 - 1 = 0$ ，当且仅当 $x=1$ 时取等号。

即方程 $2^{2x-2} - a \cos(1-x) = 0$ 只有一个实数解，符合题设。

选 B.

4. 解： $z = x + 2y - \frac{1}{x} = 2(x+y) - (x + \frac{1}{x}) \leq 2 \times 3 - (x + \frac{1}{x}) \leq 2 \times 3 - 2 = 4$

当且仅当 $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ 时，等号成立。

选 D.

5. 解：由题设得： $\begin{cases} x-1=0, \\ x^2+y^2+2x-4=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1>0, \\ x+y-1=0, \\ x^2+y^2+2x-4=0. \end{cases}$ 有三组解 $(1,1), (1,-1), (\frac{\sqrt{6}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{6}}{2})$ 。

选 C.

6. 解：函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上递减，且 $4f(x) = f(2x)$ ，

所以 $f(x+t) < 4f(x) \Leftrightarrow f(x+t) < f(2x) \Leftrightarrow x+t > 2x \Leftrightarrow t > x$ ，

所以 $t \geq t^2$ ，解得 $0 \leq t \leq 1$ 。

选 D.

二、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

7. 解: 因为 $\alpha, \beta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, 所以 $\alpha + \beta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, $\beta - \frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$.

因为 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\sin(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{12}{13}$,

所以 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, $\cos(\beta - \frac{\pi}{4}) = -\frac{5}{13}$.

所以 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \cos(\alpha + \beta - (\beta - \frac{\pi}{4}))$

$$\begin{aligned} &= \cos(\alpha + \beta)\cos(\beta - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{4}{5} \times (-\frac{5}{13}) + (-\frac{3}{5}) \times \frac{12}{13} = -\frac{56}{65}. \end{aligned}$$

8. 解: 由相交弦定理得 $AP \cdot BP = CP \cdot DP$, 所以 $BP = 7$,

直径 $AB = 8$, 连接 DO .

由 $PD = 5, PO = 4 - 1 = 3, DO = 4$, 知 $DO \perp AB$.

所以 $\triangle DAB$ 为等腰直角三角形,

所以 $\angle DCB = \angle DAB = 45^\circ$.

9. 解: 设 Q 为点 P 在底面 $ABCD$ 中的投影, 于是点 P 到直线 CC_1 的距离等于 Q 到点 C 的距离. 注意到 Q 在线段 DE 上, 所以点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值等于直角三角形 DCE 中斜边 DE 上的高, 其值为 $\frac{DC \cdot CE}{DE} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

10. 解: $a = 1$ 时, $f(1) = 0$, 符合题设;

$$a > 1 \text{ 时, } f(x) = (x-a)^2 x + ax^2 - 2x + 1 \geq ax^2 - 2x + 1 > x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

不符合题设.

综上, 实数 a 的最大值为 1.

11. 解: 总共有 4^6 种可能, 其中获奖的情况可分为两类, 第一类是有 3 袋食品的卡片相同的获奖情况 (即

$AAABCD$) 有 $C_6^3 \times 4!$ 种, 第二类是有两组 2 袋食品的卡片相同的获奖情况 (即 $AABBCCD$) 有 $\frac{C_6^2 C_4^2}{2} \times 4!$ 种,

所以概率是 $\frac{195}{512}$.

12. 解: 由题设知 $a + c = 2b, bd = c^2, d - a = 90$, 消去 c, d , 得 $b(a + 90) = (2b - a)^2$,

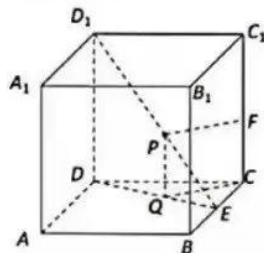
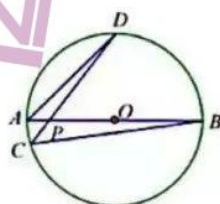
即 $90b = (4b - a)(b - a)$, 因为 $4b - a \equiv b - a \pmod{6}$, 所以 $4b - a, b - a$ 都是 6 的倍数,

又因为 $3b < 4b - a < 4b$, 所以 $22.5 < b - a < 30$, 故 $b - a = 24$,

从而 $4b - a = \frac{15}{4}b$, 即 $b = 4a$, 从而 $c = 7a$, $d = \frac{49}{4}a$,

故 $\frac{49}{4}a - a = 90$.

所以 $a = 8, b = 32, c = 56, d = 98$, 故 $a + b + c + d = 8 + 32 + 56 + 98 = 194$.



三、解答题 (每小题 15 分, 共 60 分)

13. 解: (I) 因为 $RQ \parallel AD$, $AD \parallel BC$,

所以 $RQ \parallel BC$, 故 B, C, Q, R 共面.

因为 $CB \perp$ 平面 RAB , 且 $AE \subset$ 平面 RAB ,

所以 $CB \perp AE$.

又 $RB \perp AE$, 且 $RB \cap CB = B$,

所以 $AE \perp$ 平面 $BCQR$.

又 $CM \subset$ 平面 $BCQR$,

所以 $AE \perp CM$.

(II) 如图, 以 A 为坐标原点,

建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $R(0,0,2)$, $Q(0,1,2)$.

平面 MQD 即为平面 DBQ ,

$$\overrightarrow{DB} = (2, -2, 0), \quad \overrightarrow{DQ} = (0, -1, 2).$$

设平面 DBQ 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0. \end{cases} \text{ 取 } z = 1, \text{ 得 } \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases} \text{ 所以 } \vec{n} = (2, 2, 1).$$

因为 M 为线段 BQ 上的动点, 所以可设 $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CQ} + (1-\lambda) \overrightarrow{CB}$ (其中 $0 \leq \lambda \leq 1$).

$$\text{又 } \overrightarrow{CB} = (0, -2, 0), \quad \overrightarrow{CQ} = (-2, -1, 2),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CM} = (-2\lambda, \lambda - 2, 2\lambda), \quad \overrightarrow{MC} = (2\lambda, -\lambda + 2, -2\lambda).$$

设 MC 与平面 MQD 所成角为 θ ,

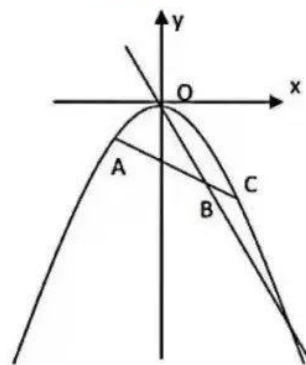
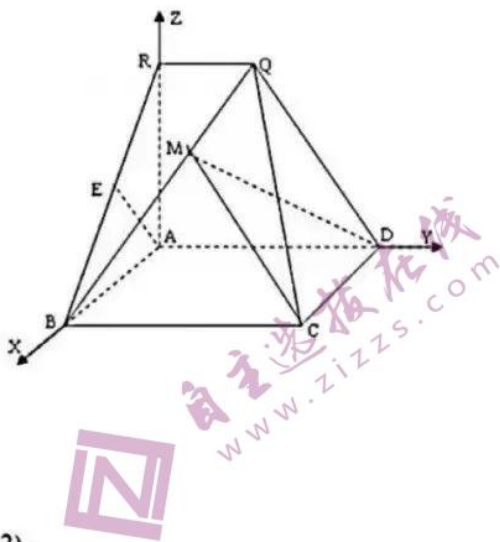
$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{MC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4}{3 \times \sqrt{9\lambda^2 - 4\lambda + 4}} = \frac{4}{3 \times \sqrt{9(\lambda - \frac{2}{9})^2 + \frac{32}{9}}} \in [\frac{4}{9}, \frac{\sqrt{2}}{2}],$$

即 MC 与平面 MQD 所成角的正弦值的取值范围是 $[\frac{4}{9}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

14. 解: 由 $(x^2 + y)(x + y) = 0$ 得 $y = -x^2$ 或 $y = -x$

$$(1) \text{ 联立 } \begin{cases} y = -x^2 \\ y = kx + \frac{1}{16} \end{cases} \text{ 得 } x^2 + kx + \frac{1}{16} = 0 \quad (*)$$

$$\text{由 } \Delta = k^2 - 4 \times \frac{1}{16} > 0, \text{ 解得 } k > \frac{1}{2} \text{ 或 } k < -\frac{1}{2}$$



因为 $\begin{cases} y = -x \\ y = kx + \frac{1}{16} \end{cases}$ 有唯一解, 得 $k \neq -1$.

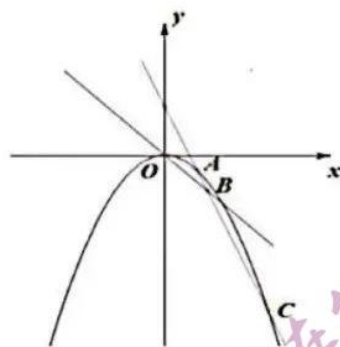
又直线 $l: y = kx + b$ 与曲线 C 交于三个不同的点, 所以 $x = 1$ 不是方程 (*) 的解, 即 $k \neq -\frac{17}{16}$.

所以 k 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{17}{16}) \cup (-\frac{17}{16}, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

(2) 情形 1 (如图 1): 联立 $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = kx + 1 \end{cases}$ 得 $x^2 + kx + 1 = 0$.

设 $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ 则 $\begin{cases} \Delta = k^2 - 4 > 0 \\ x_1 + x_2 = -k \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$

设 AC 的中点为 $B(x_B, y_B)$, 则 $x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{k}{2}$, $y_B = kx_B + 1 = -\frac{k^2}{2} + 1$.



又点 $B(-\frac{k}{2}, -\frac{k^2}{2} + 1)$ 在直线 $y = -x$ 上,

从而 $-\frac{k^2}{2} + 1 = -(-\frac{k}{2})$.

所以 $k = 1$ 或 -2 , 不满足 $\Delta > 0$, 舍去.

情形 2 (如图 2): 设 $A(m, -m^2), B(n, -n^2)$ ($m \neq n$)

则直线 AB 的方程为 $y = -(m+n)x + mn$.

又直线 AB 即为直线 $l: y = kx + 1$.

从而 $k = -(m+n)$, $mn = 1$.

由 B 为线段 AC 的中点, 得 $C(2n-m, -2n^2+m^2)$.

$\therefore$ 点 C 在直线 $y = -x$ 上, 得 $-2n^2 + m^2 = -2n + m$.

联立 $\begin{cases} mn = 1, \\ -2n^2 + m^2 = -2n + m. \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases} \text{ (舍) 或 } \begin{cases} m=-\sqrt[3]{2} \\ n=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

$$\therefore k = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

综上, k 的值为 $\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

15. 解: 若 $m > 9$, 取 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 1$, 显然这组正数 a, b, c 满足 $abc \leq \frac{1}{4}$ 且 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} < m$, 但是

不存在以 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ 为三边长的三角形, 所以 $m \leq 9$.

下面证明“对于满足 $abc \leq \frac{1}{4}$ 且 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} < 9$ 的任意一组正数 a, b, c , 均存在以 a, b, c 为三边长的三角形”.

不妨设 $a \leq b \leq c$, 假设 $c \geq a + b$.

令 $d = \frac{1}{4ab}$, 则 $d^2 \geq c^2 \geq (a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 = \frac{1}{d}$, 于是 $d \geq 1$.

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &\geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{ab} + \frac{1}{d^2} = [4(a+b)d]^2 - 8d + \frac{1}{d^2} \geq 8d + \frac{1}{d^2} \\ &= 9 + \frac{(d-1)(8d^2-d-1)}{d^2} \geq 9 \end{aligned}$$

与 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} < 9$ 矛盾.

所以存在以 a, b, c 为三边长的三角形.

综上, 实数 m 的最大值为 9.

16. 解: 若已知的 10 个不同点为 $P_1(1,1), P_2(1,2), P_3(1,3), P_4(1,4), P_5(1,5), P_6(1,6), P_7(2,2), P_8(2,3), P_9(2,4), P_{10}(2,5)$. 考虑到 $P_1(1,1), P_2(1,2), P_3(1,3), P_4(1,4), P_5(1,5), P_6(1,6)$ 两两构成“同标点对”, 所以不能将以上 10 个不同点恰好分成 5 个点对, 每个点对都不是“同标点对”. 所以 $m \leq 4$.

下面证明: 若 10 个不同点满足: 与每个点构成“同标点对”的点均不超过 4 个, 则

都可以恰好将它们分成 5 个点队，每个点队都不是“同标点队”。

先将 10 个点随意分为 5 对，设为 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_2, R_2\}, \{Q_3, R_3\}, \{Q_4, R_4\}, \{Q_5, R_5\}$ 。

若 Q_i 与 $R_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 均不构成“同标点队”，只需按上述分法即可。

若存在某对的两个点构成“同标点队”，如 Q_1, R_1 构成“同标点队”，考虑如下的调整方法：

方法 1：将 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_2, R_2\}$ 换为 $\{Q_1, Q_2\}, \{R_1, R_2\}$ ，其余组不变；

方法 2：将 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_2, R_2\}$ 换为 $\{Q_1, R_2\}, \{R_1, Q_2\}$ ，其余组不变；

方法 3：将 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_3, R_3\}$ 换为 $\{Q_1, Q_3\}, \{R_1, R_3\}$ ，其余组不变；

方法 4：将 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_3, R_3\}$ 换为 $\{Q_1, R_3\}, \{R_1, Q_3\}$ ，其余组不变；

方法 5：将 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_4, R_4\}$ 换为 $\{Q_1, Q_4\}, \{R_1, R_4\}$ ，其余组不变；

方法 6：将 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_4, R_4\}$ 换为 $\{Q_1, R_4\}, \{R_1, Q_4\}$ ，其余组不变。

方法 7：将 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_5, R_5\}$ 换为 $\{Q_1, Q_5\}, \{R_1, R_5\}$ ，其余组不变；

方法 8：将 $\{Q_1, R_1\}, \{Q_5, R_5\}$ 换为 $\{Q_1, R_5\}, \{R_1, Q_5\}$ ，其余组不变。

由于 Q_1, R_1 除了 R_1, Q_1 外，至多各还有 3 个点与之构成“同标点队”，故上述 8 种方法中必存在一种方法，使得调整后的两个点队均不构成“同标点队”。按上述方法进行一次调整，这样至少减少了一个构成“同标点队”的点队。如果按上述方法进行一次调整后，还有构成“同标点队”的点队，再考虑类似的 8 种方法进行调整。这样随着不断调整，构成“同标点队”的点队必将逐渐减少。最终，经过有限次调整，一定能分成 5 个点队，每个点队都不是“同标点队”。

综上， m 的最大值为 4。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》