高三数学试题参考答案

2023.10

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1-5　C B A C C　　　　6-8　D B C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.AC　　10. ABD　　11. ABD　　12.ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

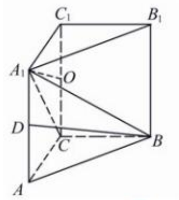
13. $\frac{1}{9}$　14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　15. 奇　-1（第一空 2 分，第二空 3 分）　16. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （10 分）解：(1) 如图，因为 $A_1C\perp$ 底面 ABC，$BC\subset$ 面 ABC，所以 $A_1C\perp BC$，

又 $BC\perp AC$，$A_1C,AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，$A_1C\cap AC=C$，所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，

又 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，……2 分



过 A_1 作 $A_1O\perp CC_1$ 交 CC_1 于 O，又平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=CC_1$，$A_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $A_1O\perp$ 平面 BCC_1B_1，则 A_1O 的长为点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1CC_1$ 中，$A_1C=A_1C_1$，$AA_1=CC_1=4$，则 $A_1O=2$.

所以点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 2.　……………………………5 分

(2) 连结 A_1B 因为 $AC=A_1C,BC\perp A_1C,BC\perp AC$，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle ACB\cong\mathrm{Rt}\triangle A_1CB$，　所以 $BA=BA_1$，……………………………6 分

过 B 作 $BD\perp AA_1$，交 AA_1 于 D，则 D 为 AA_1 中点，

由直线 AA_1 与 BB_1 距离为 4，所以 $BD=4$

因为 $A_1D=2$，所以 $AB=2\sqrt{5}$，……………………………8 分

1

又点 A 到平面 BCC_1B_1 距离也为2，设 AB 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ，则

$\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………10 分

18. （12 分）解：（1）由 $a_{n+1}=Aa_n+B$ 得，

$a_{n+1}-\frac{B}{1-A}=Aa_n+B-\frac{B}{1-A}=Aa_n-\frac{BA}{1-A}=A\left(a_n-\frac{B}{1-A}\right)$ ……………4 分

所以，数列 $\left\{a_n-\frac{B}{1-A}\right\}$ 是以 A 为公比的等比数列. ……………5 分

（2）由 $A=2,B=-1$ 得，数列 $\{a_n-1\}$ 是以2为公比的等比数列，

又因为 $a_1=2$ 所以，$a_1-1=1$，$a_n-1=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

所以，$a_n=2^{n-1}+1$ ……………7 分

$b_n=\frac{a_n-1}{a_na_{n+1}}=\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}=\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}$， ……………9 分

所以，$T_n=\left(\frac{1}{2^0+1}-\frac{1}{2^1+1}\right)+\left(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}=\frac{2^n-1}{2(2^n+1)}$ ……………12 分

19. （12 分）

解：（1）$f'(x)=6x^2-6x+3$，$f''(x)=12x-6$， ……………1 分

令 $f''(x)=0$ 可得 $x=\frac{1}{2}$，

因为 $f(x)$ 为三次函数，所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$，故

$f(x)+f(1-x)=-2$， ……………3 分

2

设$m=f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2023}{2024}\right)$，则$m=f\left(\frac{2023}{2024}\right)+f\left(\frac{2022}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2024}\right)$，

所以$2m=2023(f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2023}{2024}\right))=2023\times(-2)=-4046$，故$m=-2023$. …………6分

（2）不等式化为：$3ax^2-(a+3)x+1<0$，且$a>0$，即：$(3x-1)(ax-1)<0$ ……………8分

①当$0<a<3$时，解得$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{a}$，

②当$a=3$时，不等式的解集为$\varnothing$，

③当$a>3$时，解得$\frac{1}{a}<x<\frac{1}{3}$； ……………11分

综上所述，当$0<a<3$时，不等式的解集为$\{x|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{a}\}$，

当$a=3$时，不等式的解集为$\varnothing$，当$a>3$时，不等式的解集为$\{x|\frac{1}{a}<x<\frac{1}{3}\}$. ………12分

20.（12分） 解：(1) 证明：因为四边形$ABCD$和$EFCD$都是直角梯形，

所以，$DC\perp CF, DC\perp CB$，且$CF\cap CB=C$，

所以，$DC\perp$平面BCF， ………………3分

因为$DC\subset$平面$ABCD$，所以平面$ABCD\perp$平面BCF. ………………4分

（2）过点E、D分别作直线DC、AB的垂线EG、DH垂足为G、H.

由已知和平面几何知识易知，

$DG=AH=2, \angle EFC=\angle DCF=\angle DCB=\angle ABC=90^\circ$.

则四边形$EFCG$和四边形$DCBH$是矩形，

所以在RtΔEGD和RtΔDHA中，$EG=DH=2\sqrt{3}$， …………5分

假设在AE上存在点M，使得二面角$M-BC-F$的大小为45°.

由（1）知$DC\perp$平面BCF，则$\angle BCF$是二面角$F-DC-B$的平面角，

所以$\angle BCF=60^\circ$， 所以$\triangle BCF$是正三角形. ……………………6分

取BC的中点N，则$FN\perp BC$，又$FN\subset$平面BCF，所以$FN\perp$平面$ABCD$，

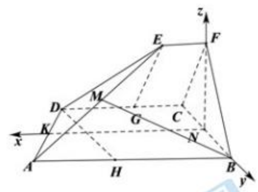
过点N作AB平行线NK，

3

则以点 N 为原点，NK，NB、NF 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 $N-xyz$，设 $AM=\lambda AE(0<\lambda<1)$，

则 $A(5,\sqrt{3},0),B(0,\sqrt{3},0),C(0,-\sqrt{3},0),E(1,0,3)$，则 $M(5-4\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,3\lambda)$

则 $\overrightarrow{BM}=\left(5-4\lambda,-\sqrt{3}\lambda,3\lambda\right),\overrightarrow{BC}=(0,-2\sqrt{3},0)$，　……8 分



设平面 BCM 的法向量为 $\vec{n}_1=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}_1\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-2\sqrt{3}y=0\\ (5-4\lambda)x-\sqrt{3}\lambda y+3\lambda z=0\end{cases}$，

取 $\vec{n}_1=(1,0,\frac{4\lambda-5}{3\lambda})$，　………9 分

又平面 BCF 的法向量 $\vec{n}_2=(1,0,0)$，所以 $\cos45^\circ=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{1+(\frac{4\lambda-5}{3\lambda})^2}}$，

整理化简的 $7\lambda^2-40\lambda+25=0$，解得 $\lambda=\frac{5}{7}$ 或 $\lambda=5$（舍去）．　……………………11 分

所以存在点 M，使得二面角 $M-BC-F$ 的大小为 45°，且 $AM=\frac{5}{7}AE$．　………12 分

21.（12 分）解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d．由题意知，$a_1+3d+a_1+4d=a_1+8d$，

解得 $d=1$，所以 $a_n=n$，　……………1 分

因为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=3^n-1$，

当 $n=1$ 时，$b_1=3^1-1=2$

当 $n\geq2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-3^{n-1}+1=2\times3^{n-1}$，

经验证当 $n=1$ 时，也满足上式

综上得，$b_n=2\times3^{n-1}$　……………4 分

（2）(i) 在 b_n 和 b_{n+1} 之间插入 n 个数 $c_{n1},c_{n2},\cdots,c_{nn}$，

因为 b_n，c_{n1}，$c_{n2}\cdots c_{nn}$，b_{n+1} 成等差数列，设公差为 d_n

4

$d_n=\dfrac{b_{n+1}-b_n}{n+1}=\dfrac{2\times3^n-2\times3^{n-1}}{n+1}=\dfrac{4\times3^{n-1}}{n+1}$，

则 $c_{nk}=b_n+kd_n=2\times3^{n-1}+k\dfrac{4\times3^{n-1}}{n+1}=\dfrac{2k+1+n}{n+1}\times2\times3^{n-1}$ ……………6 分

（ii）设 $M_n=c_{n1}+c_{n2}+\cdots+c_{nn}=n(2\times3^{n-1}+\dfrac{4\times3^{n-1}}{n+1})+\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{4\times3^{n-1}}{n+1}=4n\times3^{n-1}$

……………8 分

则 $c_{11}+c_{21}+c_{22}+\cdots+c_{n1}+c_{n2}+\cdots+c_{nn}$

$=c_{11}+(c_{21}+c_{22})+\cdots+(c_{n1}+c_{n2}+\cdots+c_{nn})=M_1+M_2+\cdots+M_n$

设 $T_n=M_1+M_2+\cdots+M_n$

即 $T_n=4\times3^0+8\times3^1+12\times3^2+\cdots+(4n-4)3^{n-2}+4n\times3^{n-1}$

$3T_n=\quad 4\times3^1+8\times3^2+12\times3^3+\cdots+(4n-4)\times2\times3^{n-1}+4n\times3^n$

$-2T_n=4+4\times3^1+4\times3^2+\cdots+4\times3^{n-1}-4n\times3^n$ ……………10 分

$=4(3^0+3+3^2+3^2+\cdots+3^{n-1})-4n\times3^n$

$=4\times\dfrac{1-3^n}{1-3}-4n\times3^n$ ……………11 分

所以，$T_n=1+(2n-1)\times3^n$. ……………12 分

22.（12 分）

解:（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\ln x+1$,……………1 分

令 $f'(x)=0$ 得, $x=\dfrac{1}{e}$,

由 $f'(x)<0$ 得, $0<x<\dfrac{1}{e}$; 由 $f'(x)>0$ 得, $x>\dfrac{1}{e}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\dfrac{1}{e})$，单调递增区间为 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ ……………2 分

列表得:

x	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值$-\frac{1}{e}$	$\uparrow$

所以当$x=\frac{1}{e}$时的极小值为$-\frac{1}{e}$，无极大值.……………3 分

函数$f(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递.

（2） 由题意得，$M(x_0,x_0\ln x_0),x_0>\frac{1}{e}$,

所以$k_l=f'(x_0)=\ln x_0+1$.

故切线l的方程为：$y=(\ln x_0+1)x-x_0$,……………4 分

所以$A(\frac{x_0}{\ln x_0+1},0),B(0,-x_0),S=\frac{x_0^2}{2(\ln x_0+1)}$.……………5 分

令$h(x)=\frac{x^2}{2(\ln x+1)^2},x>\frac{1}{e}$,

所以$h'(x)=\frac{x(1+2\ln x)}{2(1+\ln x)^2}$，令$h'(x)=0,x=e^{-\frac{1}{2}}$,

列表得,

x	$(\frac{1}{e},e^{-\frac{1}{2}})$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\downarrow$	极小值$\frac{1}{e}$	$\uparrow$

所以当$x=e^{-\frac{1}{2}}$时，$h(x)_{\min}=\frac{1}{e}$，此时$S_{\min}=\frac{1}{e}$.……………7 分

（3）由条件得，$g(x)=e^{\lambda x\ln x}-x\ln x$,

6

令 $t=x\ln x, t\in\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$, $\varphi(t)=e^{\lambda t}-t$,

则不等式 $g(x)\geq 1$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立可转化为 $\varphi(t)=e^{\lambda t}-t\geq 1$ 对任意

$t\in\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ 恒成立，……………8 分

又 $\varphi'(t)=\lambda e^{\lambda t}-1$,

当 $\lambda\leq 0$ 时，$\varphi'(t)<0$ 恒成立，所以函数 $\varphi(t)$ 在 $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递减，

又 $\varphi(1)=e^{\lambda}-1<1$ 不符合题意，故舍去，……………9 分

当 $\lambda>0$ 时，令 $\varphi'(t)=0$, 解得 $t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}$,

①当 $\lambda=e$ 时，$\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}=-\frac{1}{e}$, 此时 $\varphi'(t)\geq 0$ 恒成立，所以函数 $\varphi(t)$ 在 $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调

递增，但是 $\varphi(-\frac{1}{e})=\frac{2}{e}<1$, 不符合题意，故舍去，……………10 分

②当 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq e$ 时，由(1)知，$\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}>-\frac{1}{e}$,

故 $\varphi(t)$ 在 $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(t)_{\min}=\varphi(\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda})=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}$, 则 $\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}\geq 1$,

即 $\ln\lambda-\lambda+1\geq 0, \lambda>0$, ④

构造函数 $m(\lambda)=\ln\lambda-\lambda+1, \lambda>0$, 则 $m'(\lambda)=\frac{1}{\lambda}-1$,

所以 $m(\lambda)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $m(\lambda)_{\max}=m(1)=0$,

即 $\ln\lambda-\lambda+1\leq 0, \lambda>0$, ⑤

由④⑤得，即 $\ln\lambda-\lambda+1=0$, 解得 $\lambda=1$. ……………12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**